

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 38

Cursus conforme afbeeldingen.

Geléen-Lutterade 1956/57.

W.Peremans en G.W.Veltkamp.



1957

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

te

Geleen-Lutterade

1956-'57

Theoretisch gedeelte

door

Dr W. Peremans

§1. Enkele stellingen uit de complexe functietheorie.

We memoreren hieronder enkele stellingen uit de complexe functietheorie, die in het vervolg worden gebruikt.

Een begrensde rij complexe getallen bezit een convergente deelrij.

Een gesloten Jordankromme verdeelt het platte vlak in twee gebieden, het binnengebied en het buitengebied.

Een gebied G heet enkelvoudig samenhangend, als van iedere gesloten Jordankromme die in G ligt ook het binnengebied in G ligt.

Een begrensde afgeloten deelverzameling heet een compacte verzameling.

Als G een gebied is en K de rand van G is, dan heet de verzameling \bar{G} die de vereniging van G en K is een afgesloten gebied. Als G bovendien begrensd is, heet \bar{G} een compact gebied. Een afgesloten (resp. compact) gebied is dus wel een afgesloten (resp. compacte) verzameling, maar in het algemeen geen gebied!

Als A een compacte verzameling is en als aan ieder punt a van A een cirkel $K(a)$ toegevoegd is met middelpunt a en positieve straal, dan is er een eindige verzameling punten a_1, \dots, a_m van A , zodat ieder punt van A binnen minstens één der cirkels $K(a_1), \dots, K(a_m)$ ligt (stelling van Heine-Borel).

Een complexe functie $f(z)$ heet analytisch in a , als er een omgeving van a is, waar $f(z)$ gedefinieerd en differentieerbaar is. Als $f(z)$ een complexe functie en A een samenhangende verzameling is, dan heet $f(z)$ analytisch in A , als zij analytisch is in ieder punt van A (dit impliceert dat er een gebied G is dat A bevat en waarop $f(z)$ analytisch is).

Als een functie $f(z)$ continu is op een weg W , dan kan de integraal $\int_W f(z)dz$ gedefinieerd worden.

Als l de lengte van W is, $f(z)$ continu op W is en $|f(z)| \leq M$ op W is, dan geldt $\left| \int_W f(z)dz \right| \leq Ml$.

Als C een weg is en $f(z)$ continu op W , dan is $h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$ een analytische functie buiten C , die willekeurig vaak differentieerbaar is en waarvoor geldt $h^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$.

Als C een enkelvoudige gesloten weg is en $f(z)$ analytisch op en binnen C , dan geldt $\int_C f(z)dz=0$ (stelling van Cauchy).

Als C een enkelvoudige gesloten weg is en $f(z)$ analytisch op en binnen C , dan geldt voor iedere z , die binnen C gelegen is,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$
 (formule van Cauchy).

Als $f(z)$ analytisch in a is, dan is $f(z)$ willekeurig vaak differentieerbaar in a en er geldt

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta,$$

waarin C een enkelvoudige gesloten weg is, waarbinnen a ligt en waarop en waarbinnen $f(z)$ analytisch is.

Als $f(z)$ analytisch in a is, dan is $f(z)$ in een omgeving van a in een reeks van Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ te ontwikkelen, waarin $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$. Als $f(z)$ voor $|z-a| < R$ analytisch is en $|f(z)| \leq M$ voor deze z , dan geldt $|a_n| \leq \frac{M}{R^n}$ (coëfficiëntenschatting van Cauchy). Als $a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$ en $a_k \neq 0$, dan heet a een k -voudig nulpunt van $f(z)$.

Als $f(z)$ analytisch in een omgeving van a is met uitzondering van a zelf, dan is $f(z)$ daar in een reeks van Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ te ontwikkelen. Als er oneindig veel coëfficiënten met negatieve index $\neq 0$ zijn, heet a een essentiële singulariteit van $f(z)$; als alle coëfficiënten met negatieve index $= 0$ zijn, is $f(z)$ in a analytisch voort te zetten door te definiëren $f(a) = a_0$; als er een eindig aantal coëfficiënten met negatieve index $\neq 0$ en de overige $= 0$ zijn, zodat de reeks te schrijven is als $\sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z-a)^n$ met $a_{-k} \neq 0$, dan heet a een k -voudige pool van $f(z)$. De coëfficiënt a_{-1} heet het residu van $f(z)$ in a . Als $f(z)$ in a een essentiële singulariteit of een pool heeft, heet a een geïsoleerde singulariteit van $f(z)$.

Als C een enkelvoudige gesloten weg is, als $f(z)$ op C analytisch is en binnen C analytisch met uitzondering van een eindig aantal geïsoleerde singulariteiten, dan is $\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)dz$ gelijk aan de som van de residuen in deze singulariteiten (residuenstelling).

We kunnen het complexe vlak met een punt ∞ uitbreiden tot de complexe bol. Het gedrag van een $f(z)$ in ∞ bepalen we door middel van het gedrag van $f(\frac{1}{z})$ in het punt 0 . Zo kunnen we b.v. spreken van een pool of een essentiële singulariteit in ∞ . Als een functie ergens een pool heeft, zeggen we dat de functie daar de waarde ∞ heeft (we zeggen dan echter niet, dat de functie daar analytisch is!). In het algemeen zullen we, als ∞ toegelaten wordt, dit uitdrukkelijk vermelden. Als deze vermelding ontbreekt, houden we ons bezig met het complexe vlak en met eindige waarden.

Een functie, die in het hele complexe vlak analytisch is, heet een gehele functie.

Een functie die op de complexe bol analytisch is, is constant (stelling van Liouville).

Een andere formulering van deze stelling luidt als volgt.

Een begrensde gehele functie is constant.

Een gehele functie, die in ∞ een pool heeft, is een polynoom.

Een functie, die op de complexe bol analytisch is met uitzondering van een aantal polen, is een (gebroken) rationale functie.

De som van de residuen van de polen (met inbegrip van een eventuele pool in ∞) van een rationale functie is 0.

Als C een enkelvoudige gesloten weg is, als $f(z)$ analytisch en $\neq 0$ op C is, als $f(z)$ binnen C analytisch is eventueel met uitzondering van een eindig aantal polen en als N (resp. P) de som van de multipliciteiten van de nulpunten (resp. polen) van $f(z)$ binnen C is, dan geldt $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N-P$.

Als C een enkelvoudige gesloten weg is, als $f(z)$ en $\varphi(z)$ analytisch op en binnen C zijn, als $|\varphi(z)| < |f(z)|$ voor alle z op C , dan is de som van de multipliciteiten van de nulpunten binnen C van $f(z) + \varphi(z)$ gelijk aan die van $f(z)$ (stelling van Rouché).

Als $f(z)$ en $g(z)$ analytisch zijn in een gebied G , als a_1, a_2, \dots een convergente rij verschillende punten van G is, waarvan de limiet ook in G ligt en als $f(a_n) = g(a_n)$ voor alle n , dan geldt $f(z) = g(z)$ voor alle z in G (identiteitsstelling).

Een belangrijk speciaal geval van deze stelling is de volgende stelling.

Als $f(z)$ analytisch in een gebied G en niet constant is en als a een complex getal is, dan heeft de verzameling der punten ζ van G waarvoor $f(\zeta) = a$ geen verdichtingspunt binnen G .

Als $f(z)$ analytisch in a is en W een weg die bij a begint, dan is het soms mogelijk $f(z)$ langs W analytisch voort te zetten. Als W een gesloten weg is, die in a begint en eindigt, dan kan het gebeuren, dat bij de voortzetting de functie in het eindpunt a een andere waarde krijgt, dan zij in het beginpunt had: de functie wordt dan meerwaardig. We zullen afspreken, dat onder een analytische functie een eenwaardige functie wordt verstaan. Een belangrijke stelling drukt nu uit, dat we bij enkelvoudig samenhangende gebieden van de meerwaardigheid geen last hebben.

Als G een enkelvoudig samenhangend gebied is, als a een punt van G is, dan is de analytische voortzetting van een functie, die analytisch in a is en die langs iedere in a beginnende en in G verlopende weg analytisch kan worden voortgezet, analytisch in G (monodromiestelling).

Als G een gebied is en als $f_1(z), f_2(z), \dots$ een rij analytische functies in G is, die convergeert en wel uniform in elk compact deelgebied van G , dan is de limietfunctie analytisch in G .

Als G een begrensde gebied is, als $f(z)$ analytisch is op het compacte gebied \bar{G} , dat ontstaat door aan G zijn rand K toe te voegen en als M het maximum van $|f(z)|$ op \bar{G} is, dan is er een z op K zodat $|f(z)| = M$. Als bovendien $f(z)$ niet constant is, geldt $|f(z)| < M$ voor $z \in G$ (maximumprincipe).

§ 2. Algemene opmerkingen over conforme afbeelding.

We gaan een analytische functie $f(z)$, gedefinieerd op een gebied G nu meetkundig bekijken. Daartoe nemen we twee platte vlakken, het complexe z -vlak en het complexe w -vlak. We beschouwen de afbeelding die aan ieder punt z in G van het z -vlak het punt $w=f(z)$ van het w -vlak toevoegt. Hiermee hebben we een afbeelding van G op een deelverzameling B van het w -vlak verkregen.

Neem nu een a in G en laat $b=f(a)$ zijn. De continuïteit van $f(z)$ garandeert nu, dat we door ons tot een voldoende kleine omgeving van a te beperken de beeldpunten willekeurig dicht bij b kunnen krijgen. We weten echter nog niet of er een omgeving van b is, die door de afbeelding geheel wordt bedekt. We zullen nu aantonen, dat dit voor een niet-constante $f(z)$ inderdaad het geval is (voor een constante functie geldt het natuurlijk niet).

Omdat $f(z)$ niet constant is, heeft de verzameling der punten ζ , waarvoor $f(\zeta)=b$ geen verdichtingspunt in G . Voor een voldoende kleine omgeving van a geldt dus, dat $f(z) \neq b$ als $z \neq a$. Neem een binnen die omgeving verlopende cirkel K met a als middelpunt en beschouw

$$(2.1) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-b} d\zeta.$$

Deze integraal $=n$ als n de multipliciteit van het nulpunt a van $f(z)-b$ is. Omdat K een compacte verzameling is heeft $|f(z)-b|$ een positief minimum voor z op K . Hieruit volgt, dat er een omgeving O van b bestaat, zodat voor w in die omgeving geldt dat $f(z)-w \neq 0$ voor z op K . We definiëren nu de functie $\varphi(w)$ door

$$(2.2) \quad \varphi(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-w} d\zeta.$$

Nu is $\varphi(w)$ een geheel getal, n.l. de som van de multipliciteiten van de nulpunten van $f(z)-w$ binnen K . Verder is makkelijk in te zien dat $\varphi(w)$ continu is. Tenslotte is $\varphi(b)=n$. Uit dit alles volgt dat $\varphi(w)=n$ voor alle w in O . Omdat $n \geq 1$, volgt hieruit dat $f(z)-w$ minstens één nulpunt binnen K heeft, d.w.z. dat er een z binnen K is,

waarvoor $f(z)=w$. Hiermee is aangetoond dat de omgeving O van b door de afbeelding overdekt wordt.

We kunnen uit het bovenstaande nog enige verdere conclusies trekken. Als $f'(a) \neq 0$, dan heeft $f(z)-b$ een enkelvoudig nulpunt in a en is dus $n=1$. Hieruit volgt dat er bij iedere w in O één en slechts één z binnen K is, waarvoor $f(z)=w$. Aangezien er een omgeving van a is, die binnen O wordt afgebeeld, is in die omgeving van a de functie eeneenduidig. Deze eigenschap drukken we uit door te zeggen dat $f(z)$ dan locaal eeneenduidig is (locaal, omdat het slechts in voldoende kleine omgevingen geldt). In O kunnen we op zinnvolle wijze een inverse functie $g(w)$ definiëren, door te eisen dat $f(g(w))=w$. Dat deze functie ook analytisch is toont men aan door te bewijzen, dat zij differentieerbaar is en dit geschiedt op precies dezelfde wijze als waarop in de reële analyse de differentieerbaarheid van een inverse functie wordt aangetoond.

Veronderstel nu dat $f'(a)=0$. Omdat $f(z)$ niet constant is, is er dan een omgeving van a , waarbinnen geldt $f'(z) \neq 0$ voor $z \neq a$. We beperken ons nu tot zo'n omgeving van a en verkleinen eventueel K (en dus O) zo ver, dat K binnen zo'n omgeving valt. Omdat $f'(a)=0$ is, is a een meer-
voudig nulpunt van $f(z)-b$, dus $n \geq 2$. Voor iedere w in O is dan de som van de multipliciteiten van de nulpunten van $f(z)-w$ binnen K minstens 2; als $w \neq b$, is de multipliciteit van elk afzonderlijk nulpunt echter $=1$, omdat $f'(z) \neq 0$ in zo'n nulpunt. Hieruit volgt dat er bij iedere $w \neq b$ in O minstens twee verschillende punten z binnen K zijn, waarvoor $f(z)=w$. Daar K willekeurig klein gekozen kan worden, zien we dat in iedere omgeving van a , hoe klein ook, de functie $f(z)$ niet eeneenduidig is. Dit geeft ons de volgende stellingen.

Stelling 2.1. Als $f(z)$ analytisch in a is en als $f'(a) \neq 0$, dan is er een omgeving van a , waarbinnen $f(z)$ eeneenduidig is en een omgeving van $f(a)$, waarbinnen de inverse functie van $f(z)$ gedefinieerd en analytisch is.

Stelling 2.2. Als $f(z)$ analytisch in a en niet constant is en als $f'(a)=0$, dan zijn er in iedere omgeving van a verschillende punten met hetzelfde beeld en dan is er bij iedere voldoende kleine omgeving O van a een omgeving O_1 van $f(a)$ zodat er voor iedere $w \neq f(a)$ in O_1 precies n verschillende punten z in O met $f(z)=w$ zijn; hierin stelt n de multipliciteit van het nulpunt a van de functie $f(z)-f(a)$ voor.

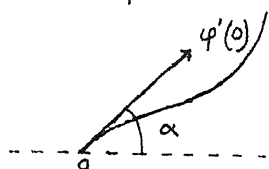
We hebben verder bewezen, dat bij ieder punt van B een omgeving is die tot B behoort, of anders uitgedrukt, dat B open is. We tonen nu aan, dat B zelfs een gebied is.

Kies daartoe b_1 en b_2 in B en laat a_1 en a_2 punten in G zijn met $f(a_1)=b_1$ en $f(a_2)=b_2$. Omdat G een gebied is, is er een gebroken lijn binnen G , die a_1 met a_2 verbindt. Laat $z = \varphi(t)$ ($0 \leq t \leq 1$, $\varphi(0)=a_1$, $\varphi(1)=a_2$)

een parametervoorstelling van deze gebroken lijn zijn. Dan is $w=f(\varphi(t))$ een continue kromme binnen B , die b_1 met b_2 verbindt. Een bekende stelling leert nu, dat als twee punten van een open verzameling door een continue kromme kunnen worden verbonden, ze ook door een gebroken lijn kunnen worden verbonden. Hieruit volgt, dat B samenhangend is.

Stelling 2.3. Als $f(z)$ analytisch in een gebied G is, dan is het beeld B van G door $f(z)$ ook een gebied.

We onderzoeken het karakter van de door $f(z)$ in een omgeving van a bepaalde afbeelding nog wat nader en wel in het geval, dat $f'(a) \neq 0$ is. We zullen aantonen dat twee krommen die van a uitgaan, en die een zekere hoek met elkaar maken afgebeeld worden in krommen die dezelfde hoek met elkaar maken. Laat een kromme gegeven zijn door een parametervoorstelling $z=\varphi(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) met $\varphi(0)=a$. Om over hoeken te kunnen spreken moeten we kunnen spreken van een raaklijn in a aan de kromme. Als nu $\varphi(t)$ differentieerbaar is voor $t=0$ en $\varphi'(0) \neq 0$, dan stelt



$\varphi'(0)$ een raakvector in a aan de kromme voor. Stellen we $\frac{\varphi'(0)}{|\varphi'(0)|} = e^{i\alpha}$, dan is α de hoek die deze raakvector met de richting van de positieve reële as maakt. Omdat $f'(a) \neq 0$, kunnen

we $\frac{f'(a)}{|f'(a)|} = e^{i\varphi}$ stellen. Het beeld van de kromme wordt gegeven door de parametervoorstelling $w=f(\varphi(t))=\psi(t)$. De raakvector in $b=f(a)$ van deze kromme is $\psi'(0)$. Volgens de kettingregel (die op analoge wijze te bewijzen is als in de reële analyse) geldt echter $\psi'(0)=f'(a)\varphi'(0)$. De hoek β die deze raakvector met de reële as maakt wordt nu als volgt gevonden:

$$e^{i\beta} = \frac{\psi'(0)}{|\psi'(0)|} = \frac{f'(a)}{|f'(a)|} \cdot \frac{\varphi'(0)}{|\varphi'(0)|} = e^{i(\alpha+\varphi)}$$
 De richting van de raaklijn aan de beeldkromme is dus over een hoek φ gedraaid t.o.v. de richting van de raaklijn aan de oorspronkelijke kromme; hierin hangt φ alleen van de afbeelding maar niet van de gekozen kromme af. Hieruit volgt ook, dat de hoek tussen twee krommen bij de afbeelding bewaard blijft. Deze eigenschap drukt men uit, door te zeggen, dat de afbeelding conform is.

Ook over afstanden van punten valt iets te zeggen. Onnauwkeurig geformuleerd kunnen we zeggen, dat deze bij de afbeelding bij benadering met $|f'(a)|$ worden vermenigvuldigd. Exact uitgedrukt: als z_1, z_2, \dots een rij punten is, die naar a convergeert en w_1, w_2, \dots de rij der beeldpunten, dan convergeert $\frac{|w_n - b|}{|z_n - a|}$ naar $|f'(a)|$. Deze bewering is een triviale consequentie van de definitie van differentieerbaarheid, immers

$$|f'(a)| = \left| \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \right| = \lim_{z \rightarrow a} \frac{|f(z) - b|}{|z - a|}.$$

Het bovenstaande bewijs van de conformiteit maakt essentieel gebruik van de veronderstelling dat $f'(a) \neq 0$. Als $f'(a) = 0$ is de afbeelding niet conform: hoeken tussen krommen worden dan met een factor n vermenigvuldigd, waarin n weer de multipliciteit van het nulpunt a van $f(z) - b$ is. We zullen dat hier niet bewijzen.

In het bovenstaande hebben we ons met het locale karakter van de afbeelding bezig gehouden. We beschouwen nu de afbeelding van het gebied G als geheel en vragen naar de eeneenduidigheid hiervan. Hiervoor is wegens stelling 2.2 blijkbaar noodzakelijk, dat $f'(z) \neq 0$ overal in G . Dit is echter niet voldoende, hetgeen uit het volgende voorbeeld blijkt. De functie e^z is een gehele functie, waarvan de afgeleide ook e^z is, die overal $\neq 0$ is. Toch is $e^{z+2\pi i} = e^z$; de afbeelding is dus niet eeneenduidig.

We zullen nu het begrip conforme afbeelding vastleggen door te eisen dat de functie analytisch en eeneenduidig is.

Definitie 2.1. Als G een gebied is en $f(z)$ een functie, die op G analytisch en eeneenduidig is, dan heet de door $f(z)$ bepaalde afbeelding een conforme afbeelding.

Men zou natuurlijk ook een meer meetkundige definitie van conforme afbeelding kunnen geven, die berust op het behoud van hoeken. Deze weg kiezen wij hier niet.

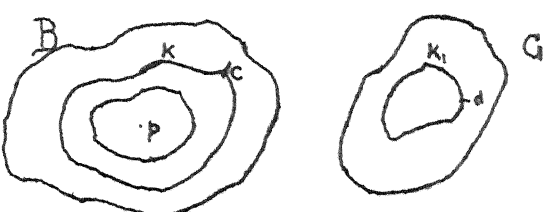
Uit definitie 2.1 en stelling 2.1 volgt direct:

Stelling 2.4. Als $f(z)$ een conforme afbeelding van een gebied G op een gebied B tot stand brengt, dan brengt de inverse functie van $f(z)$ een conforme afbeelding van B op G tot stand.

Uit het feit dat de samengestelde functie van twee analytische functies weer analytisch is volgt

Stelling 2.5. Als $f(z)$ een conforme afbeelding van een gebied G op een gebied B tot stand brengt en $g(w)$ een conforme afbeelding van B op een gebied B_1 , dan brengt $g(f(z))$ een conforme afbeelding van G op B_1 tot stand.

Voor een conforme afbeelding kunnen we stelling 2.3. nog verscherpen in die zin, dat als G enkelvoudig samenhangend is, B dit ook is. Stel n.l. dat B niet enkelvoudig samenhangend is. Dan is er een gesloten Jordankromme K in B , waarbinnen een punt p ligt, dat niet tot B behoort. Kies een punt c op K . De functie $\log(w-p)$ kan uit c langs iedere kromme die in B verloopt analytisch voortgezet worden.



Loopt men K eenmaal rond dan is de functie met $2\pi i$ toegenomen. De inverse afbeelding $g(w)$ van $f(z)$ beeldt K op een gesloten kromme K_1 in G en c in d af. De functie $\log(f(z)-p)$ kan

nu uit d langs iedere kromme in G worden voortgezet. Omdat G enkelvoudig

dig samenhangend is, is deze voortzetting volgens de monodromiestelling eenwaardig analytisch in G . Loopt men echter de kromme K_1 eenmaal rond dan is de functie met $2\pi i$ toegenomen. Dit geeft een contradictie; dus B is enkelvoudig samenhangend.

Stelling 2.6. Als $f(z)$ een conforme afbeelding van het enkelvoudig samenhangende gebied G op B tot stand brengt, dan is B een enkelvoudig samenhangend gebied.

§ 3. De conforme afbeelding door enkele eenvoudige functies.

We bespreken eerst de gebroken lineaire functie

$$(3.1) \quad \frac{az + b}{cz + d},$$

waarin $ad-bc \neq 0$ (als $ad-bc=0$ is de functie constant). Deze functie is analytisch voor alle z , echter, als $c \neq 0$, met uitzondering van het punt $z = -c^{-1}d$, waar de functie een pool van de eerste orde aanneemt. De functie neemt ook alle waarden aan, echter, als $c \neq 0$, met uitzondering van de waarde $c^{-1}a$. Dit laatste is het eenvoudigste in te zien door de inverse functie te beschouwen, die klaarblijkelijk de gedaante

$$(3.2) \quad \frac{dw - b}{-cw + a}$$

heeft. Bovendien is de functie eeneenduidig, hetgeen ook aan de inverse functie af te lezen is. Op grond van stelling 2.2 moet de afgeleide dus overal $\neq 0$ zijn, hetgeen door directe berekening te verifiëren valt. De uitzonderingspunten verdwijnen als we van het complexe vlak op de complexe bol overgaan: de functie levert een eeneenduidige analytische afbeelding van de complexe bol op zichzelf, waarbij $-c^{-1}d$ in ∞ en ∞ in $c^{-1}a$ overgaat. Als we ons tot het complexe vlak beperken, kunnen we zeggen dat ieder gebied, dat het punt $-c^{-1}d$ niet bevat door de functie conform wordt afgebeeld. We willen het karakter van deze afbeelding nader onderzoeken.

In ieder geval verandert de functie niet, als we alle coëfficiënten a, b, c en d met dezelfde factor $\neq 0$ vermenigvuldigen. Hiervan kunnen we gebruik maken om b.v. één der coëfficiënten, waarvan we weten dat hij $\neq 0$ is, gelijk aan 1 te maken.

Neem eerst het geval dat $c=0$. We kunnen dan $d=1$ kiezen en krijgen de functie $az+b$ met $a \neq 0$. De afbeelding is dan meetkundig eenvoudig te beschrijven. Schrijven we $a = |a|e^{i\alpha}$ met reële α , dan geeft vermenigvuldiging met $e^{i\alpha}$ een draaiing om het punt 0 over een hoek α , vermenigvuldiging met $|a|$ een meetkundige vermenigvuldigingstransformatie t.o.v. het punt 0 met een factor $|a|$ en optelling van b een translatie over de vector b . Het geheel is een gelijkvormigheidstransformatie; dat omgekeerd iedere gelijkvormigheidstransformatie, die de oriëntering inva-

riant laat, door een functie van de gedaante $az+b$ voortgebracht wordt is ook eenvoudig in te zien. Uiteraard gaan bij deze afbeelding rechte lijnen in rechte lijnen en cirkels in cirkels over.

Nu beschouwen we de functie $\frac{1}{z}$. Als we $z=re^{i\varphi}$ (met reële φ) en het beeldpunt $=\rho e^{i\psi}$ (met reële ψ) stellen, dan geldt $\rho=r^{-1}$ en $\psi=-\varphi$. Noemen we nu de cirkel met middelpunt in 0 en straal 1 de eenheidscirkel (dat is de collectie der punten z , waarvoor $|z|=1$ geldt), dan bestaat de transformatie uit een inversie t.o.v. de eenheidscirkel, gevolgd door een spiegeling in de reële as. Noemen we nu $z=x+iy$ (x en y reëel) en $w=u+iv$ (u en v reëel), dan geldt

$$x = \frac{u}{u^2+v^2}$$

$$y = \frac{-v}{u^2+v^2}.$$

Nemen we nu een cirkel met vergelijking $x^2+y^2+\lambda x+\mu y+\nu=0$, dan gaat deze over in $\nu(u^2+v^2)+\lambda u-\mu v+1=0$, hetgeen de vergelijking van een cirkel is als $\nu \neq 0$ en van een rechte lijn als $\nu=0$. Nemen we een rechte lijn met vergelijking $\lambda x+\mu y+\nu=0$, dan gaat deze over in $\nu(u^2+v^2)+\lambda u-\mu v=0$, hetgeen de vergelijking van een cirkel is als $\nu \neq 0$ en van een rechte lijn als $\nu=0$. Vatten we een rechte lijn op als een cirkel, die door ∞ gaat, dan kunnen we zeggen, dat cirkels in cirkels worden getransformeerd.

Keren we terug naar de functie (3.1), dan kunnen we aantonen, dat deze verkregen kan worden, door enige malen na elkaar de besproken typen van afbeeldingen toe te passen. Is n.l. $c=0$, dan is de functie al van de gedaante $az+b$. Is $c \neq 0$, dan stellen we

$$(3.3) \quad \begin{cases} z' = cz + d \\ z'' = \frac{1}{z'} \\ w = \frac{-(ad-bc)z''+a}{c} \end{cases}$$

waaruit volgt dat

$$(3.4) \quad w = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Uit (3.3) volgt nu direct, dat ook door de transformatie (3.4) cirkels in cirkels worden getransformeerd (weer rechte lijnen als ont-aarde cirkels meegeteld!)

Op grond van continuïteitsoverwegingen is het duidelijk, dat als een cirkel C_1 in een cirkel C_2 wordt getransformeerd, het binnengebied van C_1 hetzij in het binnengebied, hetzij in het buitengebied van C_2 wordt getransformeerd.

Het is verder duidelijk, dat als men twee gebroken lineaire transformaties na elkaar uitvoert, de samengestelde transformatie weer gebroken lineair is.

Om te bepalen welke punten dekpunten van de transformatie (3.4) zijn, moet de vierkantsvergelijking $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ worden opgelost. Deze heeft twee oplossingen, die tot één kunnen samenvallen en ook ∞ kunnen worden; een uitzondering hierop vormt het geval dat $a=d$ en $b=c=0$, want dan zijn alle punten dekpunten en is de transformatie de identieke transformatie.

Een belangrijke eigenschap van gebroken lineaire transformaties is de volgende. Als z_1, z_2, z_3 verschillende complexe getallen en w_1, w_2, w_3 eveneens verschillende complexe getallen zijn, bestaat er één en slechts één gebroken lineaire transformatie die z_1 in w_1 , z_2 in w_2 en z_3 in w_3 transformeert (men mag bovendien één getal van het drietal z_1, z_2, z_3 en één getal van het drietal w_1, w_2, w_3 nog door ∞ vervangen).

Dat er niet meer dan één transformatie aan de eisen voldoet zien we als volgt in. Stel τ_1 en τ_2 voldoen beide aan de eisen. Dan heeft de transformatie $\tau_2^{-1} \tau_1$ (hierin stelt τ_2^{-1} de inverse transformatie van τ_2 voor) drie verschillende dekpunten, n.l. z_1, z_2, z_3 en moet dus de identieke transformatie zijn. Hieruit volgt dat $\tau_1 = \tau_2$.

Om aan te tonen, dat er een transformatie is, die aan de eisen voldoet beschouwen we de functie

$$(3.5) \quad \frac{(z_3 - z_2)(z - z_1)}{(z_3 - z_1)(z - z_2)}.$$

Deze geeft aanleiding tot een transformatie τ_1 , die z_1 in 0, z_2 in ∞ en z_3 in 1 transformeert. Op analoge wijze vinden we een transformatie τ_2 , die w_1 in 0, w_2 in ∞ en w_3 in 1 transformeert. De transformatie $\tau_2^{-1} \tau_1$ voldoet blijkbaar aan de vereisten. Als een van de gegeven punten ∞ is moeten wijzigingen worden aangebracht. Als b.z. $z_1 = \infty$ vervangen we (3.5) door

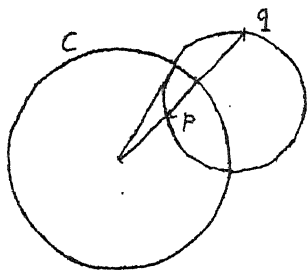
$$\frac{z_3 - z_2}{z - z_2},$$

en analoog in andere gevallen.

Als p en q twee punten zijn die door inversie t.o.v. een cirkel C in elkaar overgaan, zeggen we dat p en q gespiegeld liggen t.o.v. C.

Een gebroken lineaire transformatie heeft nu de eigenschap, dat als p en q gespiegeld liggen t.o.v. de cirkel C, de beeldpunten van p en q ook gespiegeld liggen t.o.v. de beeldcirkel van C (als deze laatste een rechte lijn is, komt de spiegeling t.o.v. deze lijn op gewone spiegeling neer). Deze eigenschap volgt uit het feit, dat lineaire

transformatie als conforme afbeelding loodrechte stand bewaart en uit



de meetkundige eigenschap, dat twee punten p en q dan en slechts dan gespiegeld liggen t.o.v. de cirkel C als iedere cirkel door p , die loodrecht op C staat, door q gaat. Dit ziet men gemakkelijk in met behulp van de raaklijn uit het mid-

delpunt van C aan de andere cirkel.

Met behulp van deze eigenschap kunnen we makkelijk alle gebroken lineaire transformaties bepalen die de eenheidscirkel op zichzelf afbeelden en hetzelfde ook met het binnengebied van de eenheidscirkel doen. Laat de transformatie het punt α in 0 overvoeren (dan geldt

$|\alpha| < 1$). Het gespiegelde punt van α t.o.v. de eenheidscirkel, d.i. $\bar{\alpha}^{-1}$ moet dan blijkbaar in ∞ overgaan. De transformatie wordt dus gegeven door een functie

$$(3.6) \quad \frac{a(z-\alpha)}{-\bar{\alpha}z+1},$$

waarin de constante a nog bepaald moet worden. Voor $|z|=1$ geldt echter $|\bar{\alpha}z+1| = |\alpha\bar{z}+1| = |z| |\alpha\bar{z}+1| = |z-\alpha|$. Dus moet gelden $|a|=1$. Omgekeerd voldoet iedere transformatie van de gedaante (3.6) met $|a|=1$ en $|\alpha| < 1$ blijkbaar aan de eisen. Dit geeft de volgende stelling.

Stelling 3.1. De gebroken lineaire transformaties, die het binnengebied van de eenheidscirkel op zichzelf afbeelden, zijn die welke bepaald worden door functies van de gedaante (3.6) met $|a|=1$ en $|\alpha| < 1$.

We kunnen hierbij blijkbaar voorschrijven, dat een willekeurig punt α binnen de eenheidscirkel in 0 vergaat en dat een willekeurige richting in α in de richting van de positieve reële as in 0 overgaat. Als we dat doen is de transformatie ondubbelzinnig bepaald.

De transformatie, bepaald door de functie

$$(3.7) \quad \frac{z-i}{iz-1}$$

beeldt het binnengebied van de eenheidscirkel af op het bovenhalfvlak (punten met positief imaginair deel) en het bovenhalfvlak op het binnengebied van de eenheidscirkel. Dit volgt uit het feit, dat de punten $0, 1, -1, i$ overgaan in resp. $i, -1, 1, 0$.

We beschouwen nu de afbeelding

$$(3.8) \quad w = \frac{1}{2}(z+z^{-1}).$$

Deze afbeelding beeldt 0 in ∞ af en is overigens analytisch. Het is duidelijk dat de punten a en a^{-1} hetzelfde beeld hebben. Trachten we z als functie van w op te lossen, dan krijgen we een vierkantsvergelijking in z , die dus ten hoogste twee wortels heeft. Als $a \neq 1$, $a \neq -1$,

is a^{-1} dus het enige punt, dat hetzelfde beeld heeft als a . De waarden 1 en -1 worden uitsluitend in de punten 1 en -1 aangenomen. De punten 1 en -1 zijn de enige waar de functie $\frac{1}{2}(z+z^{-1})$ afgeleide nul heeft. Ieder gebied, dat 0 niet bevat en dat voor geen enkele a zowel a als a^{-1} bevat, wordt door (3.8) dus conform afgebeeld. Dit geldt dus b.v. voor ieder gebied dat geheel buiten de eenheidscirkel ligt en voor ieder gebied, dat geheel binnen de eenheidscirkel ligt en 0 niet bevat.

We stellen weer $z=re^{i\varphi}$, dan is $w=\frac{1}{2}(re^{i\varphi} + r^{-1}e^{-i\varphi})$. Stellen we verder $w=u+iv$, dan geldt

$$(3.9) \quad \begin{cases} u=\frac{1}{2}(r+r^{-1}) \cos \varphi \\ v=\frac{1}{2}(r-r^{-1}) \sin \varphi \end{cases}.$$

Nemen we nu in het z -vlak een cirkel met straal r en middelpunt in 0, dan vinden we zijn beeld in het w -vlak door φ uit (3.9) te elimineren. Dit levert, als $r \neq 1$,

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}(r+r^{-1})^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4}(r-r^{-1})^2} = 1,$$

hetgeen een ellips is. Op grond van

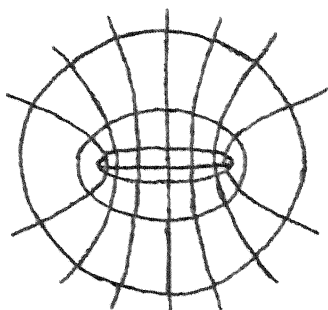
$$(3.10) \quad \frac{1}{4}(r+r^{-1})^2 - \frac{1}{4}(r-r^{-1})^2 = 1,$$

heeft deze ellips de punten 1 en -1 als brandpunten. De verschillende cirkels leveren dus confocale ellipsen en wel geven de cirkels met stralen r en r^{-1} dezelfde ellips.

Als $r=1$, vinden we $u=\cos \varphi$, $v=0$, dat is het lijnstuk $(-1,1)$ op de reële as. Het buitengebied van de eenheidscirkel wordt afgebeeld op het complexe vlak met hieruit het lijnstuk $(-1,1)$ weggelaten.

Nemen we nu in het z -vlak een rechte lijn door 0, dan vinden we zijn beeld in het w -vlak door r uit (3.9) te elimineren. Dit levert, als $\cos \varphi \neq 0$ en $\sin \varphi \neq 0$, op grond van (3.10)

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi} = 1.$$

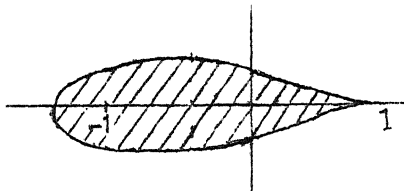


Dit is een hyperbool, die ook 1 en -1 als brandpunten heeft. De verschillende lijnen leveren dus confocale hyperbolen. Het feit dat de lijnen en de cirkel loodrecht op elkaar staan weerspiegelt zich bij conforme afbeelding in de bekende meetkundige stelling, dat hetzelfde voor confo-

cale ellipsen en hyperbolen geldt.

Als $\cos \varphi = 0$, dan is $u=0$, $v = \pm \frac{1}{2}(r-r^{-1})$. De imaginaire as wordt dus op de imaginaire as afgebeeld. Als $\sin \varphi = 0$, dan is $u = \pm \frac{1}{2}(r+r^{-1})$, $v=0$. De reële as wordt dus afgebeeld op de twee halve lijnen $(1, \infty)$ en $(-1, \infty)$ op de reële as.

De inverse afbeelding van de afbeelding (3.8) wordt in de praktijk o.a. gebruikt om vliegtuigvleugelprofielen op eenvoudiger krommen af te beelden. Nemen we b.v. een cirkel die in 1 aan de eenheidscirkel



raakt en waar het punt -1 binnen ligt, dan wordt het buitengebied van deze cirkel afgebeeld op het buitengebied van een kromme met een keerpunt in 1. Door dit nog iets te wijzigen kunnen krommen wor-

den verkregen, die nog meer op vleugelprofielen lijken (Joukowski-profielen).

De functie e^z beeldt het gebied $\alpha < y < \alpha + 2\pi$ conform af op het w -vlak met hieruit weggelaten het punt 0 en de straal $\arg w = \alpha$. Bij de afbeelding $w=e^z$ gaan lijnen evenwijdig met de reële as over in stralen door 0 en lijnen evenwijdig met de imaginaire as in cirkels met middelpunt in 0.

Door samenstelling van gebroken lineaire transformaties, de afbeelding $w=e^z$ en de afbeelding (3.8) kunnen de afbeeldingen worden bestudeerd, die geïnduceerd worden door de functies $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$. Zo krijgen we $w=\cos z$ uit $z'=iz$, $z''=e^{z'}$ en ten slotte w uit (3.8) toegepast op z'' . We gaan hier niet verder op in.

De functie $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$ (α willekeurig complex) is in het algemeen niet eenwaardig (alleen als α geheel is, is dit wel het geval). Kiezen we echter een enkelvoudig samenhangend gebied G , dat het punt 0 niet bevat, dan kunnen we de functie uit een willekeurig punt p van G langs iedere weg in G analytisch voortzetten. De zo verkregen voortzetting is volgens de monodromiestelling wel eenwaardig in G . We kunnen dus z^α in G als eenwaardige functie definiëren; hierbij zijn er in het algemeen nog verschillende mogelijkheden, afhankelijk van de waarde die in het uitgangspunt p wordt gekozen. De zo verkregen eenwaardige functie zal echter in het algemeen niet eeneenduidig zijn en dus nog geen conforme afbeelding opleveren. Dit is wel het geval als $\alpha = n^{-1}$ met gehele $n \neq 0$; dit berust op het feit, dat voor gehele $n \neq 0$ geldt $(z^{n^{-1}})^n = z$. Dit geeft het volgende resultaat.

Stelling 3.2. Als n een geheel getal $\neq 0$ is en als G een enkelvoudig samenhangend gebied is, dat 0 niet bevat, dan kan $z^{n^{-1}}$ als eenwaardige eeneenduidige analytische functie in G gedefinieerd worden en wel kan dit op $|n|$ verschillende manieren.

§ 4. De afbeeldingsstelling van Riemann.

We bespreken nu het probleem in hoeverre twee gegeven gebieden door een conforme afbeelding op elkaar kunnen worden afgebeeld. We beperken ons daarbij tot enkelvoudig samenhangende gebieden. Dat deze afbeelding niet altijd mogelijk is, blijkt als we voor G het hele complexe vlak nemen en voor B een begrensde gebied. Een conforme afbeelding van G op B zou gegeven worden door een begrensde gehele functie, die volgens Liouville constant zou zijn en dus niet tot een conforme afbeelding aanleiding kan geven. Het blijkt nu, dat deze uitzondering voortkomt uit het feit dat we het hele complexe vlak genomen hebben. Dit geval handelen we daarom eerst af. Daartoe eerst een hulpstelling, die we later ook nog nodig zullen hebben.

Hulpstelling 4.1. Als G een enkelvoudig samenhangend gebied is, dat niet het hele complexe vlak is, dan is er een conforme afbeelding die G afbeeldt op een begrensde gebied (en wel op een gebied gelegen binnen de eenheidscirkel).

Bewijs. Omdat G niet het hele complexe vlak is, bestaat er een complex getal a , dat niet in G ligt. De functie $\sqrt{z-a}$ kan volgens stelling 3.2 als eenwaardige eeneenduidige analytische functie op G vastgelegd worden; de functie is bepaald als we in een punt p van G voor de waarde van $\sqrt{p-a}$ een keuze doen. Door deze functie wordt dus een conforme afbeelding van G tot stand gebracht; de functie is nergens $=0$ in G . Als de functie een waarde w_1 aanneemt, dan neemt zij de waarde $-w_1$ niet aan. Immers als $\sqrt{z_1-a}=w_1$ en $\sqrt{z_2-a}=-w_1$, dan volgt hieruit door kwadrateren $z_1=z_2$, hetgeen in strijd is met $w_1 \neq 0$. De functie neemt de waarde $\sqrt{p-a}$ en dus op grond van stelling 2.3 alle waarden in een zekere omgeving van $\sqrt{p-a}$ aan. Voor $c=-\sqrt{p-a}$ geldt dus, dat er een zekere omgeving van c bestaat, zodat alle getallen uit die omgeving niet als waarden door de functie aangenomen worden; d.w.z. er bestaat een $\delta > 0$ zodat $|\sqrt{z-a}-c| \geq \delta$ voor alle z in G . Nemen we nu $f(z) = \frac{\delta}{2(\sqrt{z-a}-c)}$, dan brengt deze een conforme afbeelding van G voort en wel, wegens $|f(z)| \leq \frac{1}{2}$, met een beeldgebied, dat geheel binnen de eenheidscirkel ligt. Hieruit volgt nu direct

Stelling 4.1. Een conforme afbeelding van het hele complexe vlak heeft als beeldgebied het hele complexe vlak.

Bewijs. Stel er is een conforme afbeelding die het complexe vlak afbeeldt op een gebied dat niet het hele complexe vlak is. Op grond van hulpstelling 4.1 is dit laatste gebied weer conform af te beelden op een begrensde gebied. Door deze twee afbeeldingen samen te stellen vinden we een conforme afbeelding van het complexe vlak op een begrensde gebied, in strijd met de stelling van Liouville.

We sluiten nu verder het geval, dat het gebied het hele complexe

vlak is, uit. Dan kunnen we bewijzen, dat twee enkelvoudig samenhangende gebieden G_1 en G_2 conform op elkaar kunnen worden afgebeeld. Daartoe is het klaarblijkelijk voldoende te bewijzen dat een enkelvoudig samenhangend gebied conform op het binnengebied van de eenheidscirkel kan worden afgebeeld. Als n.l. φ_1 een afbeelding van G_1 en φ_2 een afbeelding van G_2 op het binnengebied van de eenheidscirkel is, dan is $\varphi_2^{-1} \varphi_1$ blijkbaar een conforme afbeelding van G_1 op G_2 .

Stelling 4.2 (Hoofdstelling van de theorie der conforme afbeeldingen).

Als G een enkelvoudig samenhangend gebied is, dat niet het hele complexe vlak is, dan bestaat er een conforme afbeelding die G op het binnengebied van de eenheidscirkel afbeeldt (stelling van Riemann).

Alvorens deze stelling te bewijzen, maken we nog enige opmerkingen. Als we stelling 4.2 bewezen hebben rijst nog de vraag op hoeveel manieren de conforme afbeelding tussen twee gegeven gebieden tot stand kan worden gebracht. Hiertoe onderzoeken we alle conforme afbeeldingen van het binnengebied van de eenheidscirkel op zichzelf.

Hulpstelling 4.2. Als $f(z)$ analytisch is en $|f(z)| \leq 1$ voor $|z| < 1$ en als $f(0)=0$, dan geldt $|f(z)| \leq |z|$ voor alle $|z| < 1$. Als er bovendien een $\zeta \neq 0$ bestaat, waarvoor $|f(\zeta)| = |\zeta| \neq 0$, dan is $f(z)=az$, waarin a constant en $|a|=1$ is (hulpstelling van Schwarz).

Bewijs: We beschouwen de functie $g(z)=z^{-1}f(z)$. Deze is analytisch voor $|z| < 1$, $z \neq 0$, maar kan ook als analytische functie in 0 verklaard worden wegens $f(0)=0$. Neem een z_0 met $|z_0| < 1$ en een reëel getal r met $|z_0| < r < 1$. Volgens het maximumprincipe is dan $|g(z_0)| \leq \max |g(z)|$, waarbij het maximum genomen wordt over $|z|=r$. Dit geeft $|g(z_0)| \leq r^{-1}$. Door r tot 1 te laten naderen vinden we $|g(z_0)| \leq 1$. Daarmee is $|f(z)| \leq |z|$ voor alle z met $|z| < 1$ bewezen. Stel nu dat $|f(\zeta)| = |\zeta| \neq 0$, d.w.z. $|g(\zeta)| = 1$. Nemen we een r met $|\zeta| < r < 1$, dan is $|g(z)| \leq 1$ voor $|z|=r$. Wederom uit het maximumprincipe volgt nu, dat $g(z)$ constant is, dus $f(z)=az$. Door ζ voor z in te vullen, vinden we $|a|=1$.

Ter afkorting zullen we het binnengebied van de eenheidscirkel met Γ aanduiden.

Stelling 4.3. Iedere conforme afbeelding van Γ op zichzelf wordt door een gebroken lineaire functie tot stand gebracht en is dus van de gedaante, die in stelling 3.1 beschreven wordt.

Bewijs. Laat de functie $f(z)$ een conforme afbeelding van Γ op zichzelf tot stand brengen. Noem $\alpha = f(0)$. Volgens stelling 3.1 is er een gebroken lineaire transformatie τ die Γ op zichzelf afbeeldt en α in 0 afbeeldt. De functie $\tau(f(z))$ voldoet aan de voorwaarden van hulpstelling 4.2; dus $|\tau(f(z))| \leq |z|$ voor alle $|z| < 1$. Voor de inverse functie van deze functie geldt hetzelfde, dus $|z| \leq |\tau(f(z))|$ voor

$|z| < 1$. Hieruit volgt $|\tau(f(z))| = |z|$. Uit het tweede deel van hulpstelling 4.2 volgt nu dat $\tau(f(z)) = az$, dus $f(z) = \tau^{-1}(az)$, dus $f(z)$ is gebroken lineair.

Stel nu twee enkelvoudig samenhangende gebieden G_1 en G_2 , conforme afbeeldingen φ_1 en φ_2 van G_1 resp. G_2 op Γ . Laat ψ een conforme afbeelding van G_1 op G_2 zijn, dan beeldt $\varphi_2 \psi \varphi_1^{-1}$ het gebied Γ op zichzelf af, dus $\varphi_2 \psi \varphi_1^{-1} = \tau$, waarin τ van de gedaante (3.6) is. Dus $\psi = \varphi_2^{-1} \tau \varphi_1$. Omgekeerd als τ een gebroken lineaire transformatie van Γ op zichzelf van de gedaante (3.6) is, is $\varphi_2^{-1} \tau \varphi_1$ een conforme afbeelding van G_1 op G_2 . We kunnen de conforme afbeelding van G_1 op G_2 vastleggen door p en een richting in p in G_1 en q en een richting in q in G_2 vast te leggen en te eisen dat p in q en de gegeven richting in p in de gegeven richting in q overgaat. Dit volgt uit de opmerking na stelling 3.1.

Voor het bewijs van de hoofdstelling hebben we enkele begrippen en hulpstellingen nodig.

Als $\{f_n(z)\}$ een rij functies is en z_0 een punt, waar ze alle gedefinieerd zijn, dan heet de rij aequicontinu in het punt z_0 , als er bij iedere reële $\varepsilon > 0$ een reële $\delta > 0$, die niet van n afhangt, bestaat, zodat uit $|z - z_0| < \delta$ volgt $|f_n(z) - f_n(z_0)| < \varepsilon$ voor alle n .

Hulpstelling 4.3. Als alle functies van de rij $\{f_n(z)\}$ analytisch zijn in een zelfde gebied G en als er een positief reëel getal M bestaat, zodat $|f_n(z)| \leq M$ voor alle z in G en alle n (m.a.w. als de functies uniform begrensd zijn), dan is de rij aequicontinu in ieder punt van G .

Bewijs. Neem een z_0 in G en kies $d > 0$ dusdanig dat de cirkel K , die straal $2d$ en middelpunt z_0 heeft, met zijn binnengebied geheel in G ligt. Voor z binnen K geldt dan

$$f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Als $|z - z_0| < d$ en ζ op K , dan $|\zeta - z| > d$, dus $|f'_n(z)| \leq \frac{2M}{d}$, dus $|f_n(z) - f_n(z_0)| = \left| \int_{z_0}^z f'_n(\zeta) d\zeta \right| \leq \frac{2M}{d} |z - z_0|$. Bij $\varepsilon > 0$ kiezen we nu $\delta =$

$= \min(d, \frac{d\varepsilon}{2M})$, dan geldt voor $|z - z_0| < \delta$, dat $|f_n(z) - f_n(z_0)| < \varepsilon$. De zo gekozen δ hangt niet van n af.

Hulpstelling 4.4. Als alle functies van de rij $\{f_n(z)\}$ analytisch en uniform begrensd zijn in het gebied G en als A een compacte deelverzameling van G is, dan bestaat er een deelrij van de rij $\{f_n(z)\}$, die in A uniform convergent is.

Bewijs. We tonen eerst aan dat als $\{b_n\}$ een rij punten uit G is, er een deelrij van $\{f_n(z)\}$ bestaat, die in alle punten b_n convergeert.

Daartoe beschouwen we eerst de rij $\{f_n(b_1)\}$; deze is begrensd en bevat dus een deelrij die convergeert. De rij $\{f_n(z)\}$ bezit dus een deelrij, die in b_1 convergeert. Van deze deelrij kunnen we weer een deelrij nemen die in b_2 (en natuurlijk ook in b_1) convergeert. Zo kunnen we doorgaan. We krijgen zo een oneindige rij van rijen:

$$\begin{array}{ll} f_1^{(1)}(z), f_2^{(1)}(z), f_3^{(1)}(z), \dots & , \quad \text{convergent in } b_1 \\ f_1^{(2)}(z), f_2^{(2)}(z), f_3^{(2)}(z), \dots & , \quad \quad \quad " \quad \quad b_1 \text{ en } b_2 \\ f_1^{(3)}(z), f_2^{(3)}(z), f_3^{(3)}(z), \dots & , \quad \quad \quad " \quad \quad b_1, b_2 \text{ en } b_3 \\ \vdots & \end{array}$$

Elke rij hierin is een deelrij van de vorige rij. We passen nu het diagonaalprocédé toe: we nemen de rij $f_1^{(1)}(z), f_2^{(2)}(z), f_3^{(3)}(z), \dots$. Deze is dan een deelrij van de oorspronkelijke rij en convergeert in alle b_n .

Neem nu een natuurlijk getal k en een punt a van A . Volgens hulpstelling 4.3 is er dan een omgeving van a , zodat voor z in die omgeving en alle n geldt $|f_n(z) - f_n(a)| < \frac{1}{k}$. Houden we nu k vast en laten we a variëren, dan krijgen we een overdekking van A , waarop we de stelling van Heine-Borel kunnen toepassen. Dit levert ons een eindig stelsel punten a_1, \dots, a_m in A , zodat bij iedere z in A een a_μ bestaat zodat voor alle n geldt $|f_n(z) - f_n(a_\mu)| < \frac{1}{k}$. Doen we dit nu voor alle natuurlijke k , dan krijgen we bij elke k een eindig stelsel punten, die we tot een oneindige rij $\{b_n\}$ samen kunnen vatten. Volgens de in het begin van dit bewijs aangegeven methode vinden we nu een deelrij $\{g_n(z)\}$ van $\{f_n(z)\}$, die in alle b_n convergeert. Laat nu een $\varepsilon > 0$ gegeven zijn; kies dan $k \geq \frac{1}{3\varepsilon}$. Bij deze k behoort een eindig stelsel der b_ν ; noem deze weer a_1, \dots, a_m . Dan is er een N zodat voor $n_1 > N$, $n_2 > N$ geldt $|g_{n_1}(a_\mu) - g_{n_2}(a_\mu)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ voor $\mu = 1, \dots, m$. Voor iedere z in A en een bijpassend gekozen a_μ geldt dan

$$\begin{aligned} |g_{n_1}(z) - g_{n_2}(z)| &\leq |g_{n_1}(z) - g_{n_1}(a_\mu)| + |g_{n_1}(a_\mu) - g_{n_2}(a_\mu)| + \\ &+ |g_{n_2}(a_\mu) - g_{n_2}(z)| < \frac{2}{k} + \frac{1}{3}\varepsilon \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Hiermee is het bewijs voltooid.

Hulpstelling 4.5. Als alle functies van de rij $\{f_n(z)\}$ analytisch en uniform begrensd zijn in het gebied G , dan is er een deelrij van de rij $\{f_n(z)\}$, die in G convergeert; deze convergentie is bovendien uniform in ieder compact deel van G .

Bewijs. Neem een natuurlijk getal k . Neem nu de verzameling C_k bestaande uit die punten z , waarvoor geldt, dat $|z| \leq k$ en dat de k^{-1} -omgeving van z geheel tot G behoort (d.w.z. iedere ξ met $|\xi - z| < k^{-1}$ ligt in G). Uiteraard is dan C_k een deel van G . We bewijzen dat C_k com-

pact is. Deze verzameling is uiteraard begreësd. Om aan te tonen, dat zij gesloten is, nemen we een rij $\{z_n\}$ met $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ en z_n in C_k voor alle n . Dan geldt $|z| \leq k$. Als ζ voldoet aan $|\zeta - z| < k^{-1}$, dan is er een n waarvoor geldt $|z - z_n| < k^{-1} - |\zeta - z|$, dus $|\zeta - z_n| < k^{-1}$, dus ζ in G , dus z in C_k , dus C_k is gesloten. Verder bestaat er bij ieder compact deel A van G een k , zodat A een deel van C_k is. Om dit te bewijzen passen we weer Heine-Borel toe: we leggen om ieder punt van A een omgeving, dusdanig dat de omgeving die twee maal zo groot is nog binnen G ligt. We vinden dan een eindig stelsel punten a_1, \dots, a_m en daarbij omgevingen met stralen r_1, \dots, r_m . Kiezen we nu k zo groot dat hij groter is dan $r_1^{-1}, \dots, r_m^{-1}$ en dat alle punten z in A voldoen aan $|z| \leq k$, dan is A een deel van C_k . Neem n.l. een z in A , dan is er een a_μ zodat $|z - a_\mu| < r_\mu$. Nemen we nu een ζ met $|\zeta - z| < k^{-1}$, dan is $|\zeta - a_\mu| < k^{-1} + r_\mu \leq 2r_\mu$, dus ζ in G , dus A is een deel van C_k . In het bijzonder volgt hieruit dat bij ieder punt van G een k bestaat, zodat dat punt in C_k ligt.

Op grond van hulpstelling 4.4 is er een deelrij van $\{f_n(z)\}$, die uniform convergeert in C_1 . Deze rij bezit weer een deelrij die uniform convergeert in C_2 enz. Past men nu weer het diagonaalprocédé toe dan vindt men een deelrij $\{g_n(z)\}$ van $\{f_n(z)\}$ die in iedere C_k uniform convergeert. Op grond van het voorafgaande voldoet deze deelrij aan de gestelde eisen; daarmee is de hulpstelling bewezen.

De limietfunctie $f(z)$ van de gevonden deelrij is uiteraard analytisch in G .

Hulpstelling 4.6. Als alle functies van de rij $\{f_n(z)\}$ analytisch en eeneenduidig in G zijn en als de rij in G convergeert naar een functie $f(z)$, terwijl deze convergentie in ieder compact deel van G uniform is, dan is $f(z)$ constant of eeneenduidig.

Bewijs: Stel dat $f(z)$ niet constant en niet eeneenduidig is. Dan zijn er twee verschillende punten z_1 en z_2 in G zodat $f(z_1) = f(z_2) = w_1$. Omdat $f(z)$ niet constant is, is er een omgeving van z_1 (resp. z_2) waarbinnen $f(z) \neq w_1$ is voor $z \neq z_1$ (resp. $z \neq z_2$). Er bestaan dus twee buiten elkaar gelegen cirkels K_1 en K_2 , die met hun binnengebieden binnen G liggen, zodat z_1 binnen K_1 en z_2 binnen K_2 ligt en zodat $f(z) \neq w_1$ voor z op K_1 of K_2 . Omdat K_1 en K_2 compact zijn is er een $d > 0$ zodat $|f(z) - w_1| > d$ voor z op K_1 of K_2 . Om dezelfde reden is er een n zodat $|f_n(z) - f(z)| < d$ voor z op K_1 of K_2 . Door toepassing van de stelling van Rouché vinden we dat de som van de multipliciteiten van de nulpunten binnen K_1 (resp. K_2) van $f(z) - w_1$ gelijk is aan die van $f_n(z) - w_1$. Voor $f(z) - w_1$ is die zowel voor K_1 als voor K_2 positief; dus er is een ζ_1 (resp. ζ_2) binnen K_1 (resp. K_2) waarvoor $f_n(\zeta_1) = f_n(\zeta_2) = w_1$. Omdat $\zeta_1 \neq \zeta_2$, is dit in strijd met de eeneenduidigheid van $f_n(z)$. Hiermee is de hulpstelling bewezen.

We gaan nu over tot het bewijs van de hoofdstelling. Kies een punt p in G . We beschouwen de klasse K van de eeneenduidige analytische functies $f(z)$, die gedefinieerd zijn op G , waarvoor geldt $|f(z)| \leq 1$ voor alle z in G en $f(p)=0$. Dat K niet leeg is volgt makkelijk uit hulpstelling 4.1. Deze geeft een conforme afbeelding van G op een gebied binnen Γ . Laat deze het punt p in α overvoeren. Voert men daarna een gebroken lineaire transformatie uit, die Γ op zichzelf afbeeldt en α in 0 overvoert, dan ligt de samengestelde functie in K .

Aan elke functie $f(z)$ van K voegen we $d(f)=|f'(p)|$ toe; dit is een positief getal. Laat D de bovenste grens van $d(f)$ zijn als $f(z)$ de klasse K doorloopt; D is een positief reëel getal of ∞ . In ieder geval is er een rij functies $\{f_n(z)\}$, waarvan alle functies tot K behoren en waarvoor geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n) = D$. Volgens hulpstelling 4.5 heeft deze rij een deelrij $\{g_n(z)\}$, die in G convergeert (en wel uniform in elk compact deel van G) naar een analytische functie $f(z)$. Nu is klaarblijkelijk $d(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(g_n) = D$. Hieruit volgt al dat $D \neq \infty$ is. Verder behoort $f(z)$ tot K . Omdat n.l. $|f'(p)| = d(f) = D \neq 0$, is $f(z)$ niet constant. Volgens hulpstelling 4.6 is $f(z)$ dus eeneenduidig; verder geldt uiteraard $|f(z)| \leq 1$ en $f(p)=0$. We zullen aantonen dat $f(z)$ een conforme afbeelding van G op Γ tot stand brengt. Allereerst is het onmogelijk, dat er een ζ in G is, waarvoor $|f(\zeta)|=1$. Als dit wel zo was, zou er een omgeving van $f(\zeta)$ zijn die door de afbeelding overdekt zou worden; een dergelijke omgeving bevat echter punten w met $|w| > 1$. Dus $|f(z)| < 1$ voor alle z in G .

Noem B het beeldgebied van G onder de afbeelding $f(z)$. Stel dat er een α met $|\alpha| < 1$ is, die niet in B ligt. Dan kan de afbeelding

$$w_1 = \sqrt{\frac{w - \alpha}{-\bar{\alpha}w + 1}},$$

op grond van stelling 3.2 op B als een conforme afbeelding bepaald worden. Deze ligt vast als we de waarde hiervan in 0 (het punt 0 ligt in B) vastleggen. Noem deze waarde $\beta = \sqrt{-\alpha}$. Verder ligt het beeldgebied B_1 van B binnen de eenheidscirkel. De afbeelding

$$w_2 = \frac{w_1 - \beta}{-\bar{\beta}w_1 + 1}$$

beeldt B_1 conform af op een gebied B_2 dat weer geheel binnen de eenheidscirkel ligt. De samengestelde afbeelding van deze drie afbeeldingen beeldt G conform op B_2 af; met $z=p$ correspondeert $w=0$, $w_1=\beta$, $w_2=0$. De functie die deze afbeelding tot stand brengt behoort dus tot de klasse K . We berekenen de absolute waarde van de afgeleide van deze functie in het punt p . Nu is

$$\left(\frac{dw_2}{dw_1}\right)_{w_1=\beta} = \left(\frac{1-|\beta|^2}{(-\bar{\beta}w_1+1)^2}\right)_{w_1=\beta} = \frac{1}{1-|\beta|^2}.$$

$$\left(\frac{dw_1}{dw}\right)_{w=0} = \left(\frac{1}{2w_1} \cdot \frac{1-|\alpha|^2}{(-\bar{\alpha}w+1)^2}\right)_{w=0} = \frac{1-|\beta|^4}{2\beta}.$$

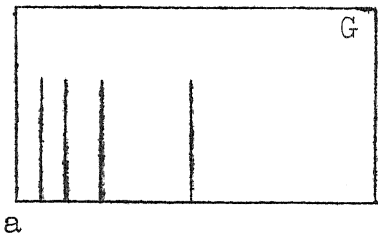
De gezochte absolute waarde is dus

$$\frac{1}{1-|\beta|^2} \cdot \frac{1-|\beta|^4}{2|\beta|} \cdot D = \frac{1+|\beta|^2}{2|\beta|} \cdot D > D,$$

omdat $0 < (1-|\beta|)^2 = 1+|\beta|^2 - 2|\beta|$. Het gevonden resultaat is echter in strijd met de definitie van D . Uit deze contradictie concluderen we dat $B = \Gamma$. Hiermee is de afbeeldingsstelling van Riemann bewezen.

§5. Voortzetting van de afbeelding op de rand van het gebied.

We willen nu onderzoeken in hoeverre de conforme afbeelding van een gebied G op een gebied B continu of analytisch tot de rand van G is uit te breiden. Om de oplossing van dit probleem niet te moeilijk te maken zullen we echter gebieden met al te onregelmatige randen uitsluiten. Een voorbeeld van een pathologische rand is het volgende.



Neem een rechthoek en zet op $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ van de (horizontale) basis even lange verticale lijnstukken, die korter zijn dan de hoogte van de rechthoek. Laat G het gebied zijn dat ontstaat door uit het binnengebied van de rechthoek deze oneindig veel lijnstukken weg te laten. Het is dan eenvoudig in te zien, dat G een enkelvoudig samenhangend gebied is en dat de rand van G bestaat uit de rand van de rechthoek plus de lijnstukken. Het hoekpunt links beneden is nu een onbereikbaar randpunt van G . Hiermee is het volgende bedoeld. Er bestaat geen continue kromme die geheel in G ligt op het eindpunt na, terwijl het eindpunt a is (een dergelijke kromme zou als volgt te bepalen zijn: $z = \varphi(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $\varphi(t)$ continu, $\varphi(t)$ in G voor $0 \leq t < 1$, $\varphi(1) = a$). We noemen een dergelijke kromme een in a eindigende kromme in G . Als nu G conform afgebeeld wordt op Γ en de afbeeldingsfunctie is continu voort te zetten tot een eeneenduidige afbeelding van de rand van G op de eenheidscirkel, waarbij a in b overgaat, dan zou een in b eindigende continue kromme in Γ door de inverse afbeelding overgaan in een in a eindigende continue kromme in G , hetgeen niet kan omdat a onbereikbaar is.

Onder een continu differentieerbare weg verstaan we een verzame-

ling in het complexe vlak, bepaald door een parametervoorstelling $z = \varphi(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $\varphi(t)$ eeneenduidig en continu differentieerbaar en $\varphi'(t) \neq 0$. We noemen $\varphi(0)$ en $\varphi(1)$ de eindpunten van de weg. Een naar oneindig lopende continu differentieerbare weg wordt bepaald door een parametervoorstelling $z = \varphi(t)$, $0 \leq t < \infty$, $\varphi(t)$ eeneenduidig en continu differentieerbaar, $\varphi'(t) \neq 0$ en $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty$. We noemen $\varphi(0)$ een eindpunt van deze weg.

We leggen in het vervolg aan onze gebiedende volgende voorwaarde op.

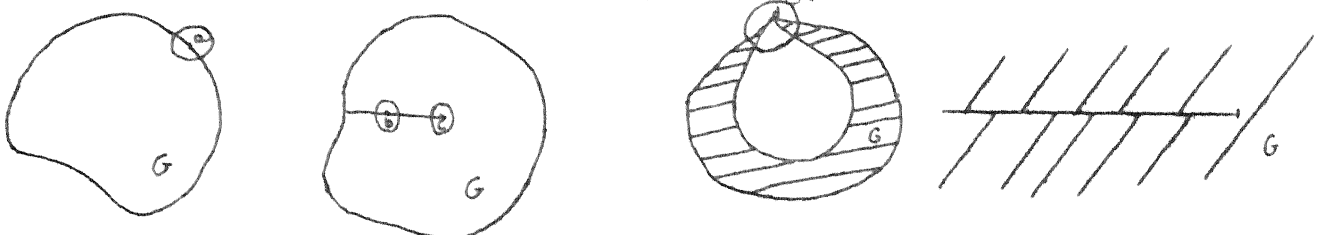
(A) De rand bestaat uit een eindig aantal (eventueel naar oneindig lopende) continu differentieerbare wegen, die twee aan twee uitsluitend eindpunten (of niets) gemeen hebben.

Vaak zullen de optredende wegen zelfs analytisch zijn; dat wil zeggen dat de functie $\varphi(t)$ in de parametervoorstelling analytisch is.

Enkelvoudig samenhangende gebieden G , die aan (A) voldoen, hebben de volgende eigenschap.

Bij ieder randpunt a bestaat er een positief reëel getal r_a en natuurlijke getallen n_a en m_a , zodat iedere cirkel met middelpunt a en positieve straal $r \leq r_a$ de rand van G in precies n_a punten snijdt. Het deel van G , dat binnen zo'n cirkel ligt valt uiteen in m_a disjuncte gebieden, die elk a als randpunt hebben. Bij een in a eindigende continue kromme in G met parametervoorstelling $z = \varphi(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) bestaat een getal ϑ met $0 \leq \vartheta < 1$, zodat $\varphi(t)$ voor $\vartheta < t < 1$ geheel in een van deze gebieden verloopt.

We zullen het bewijs van deze eigenschap niet geven; we geven alleen enkele voorbeelden ter toelichting.



In het eerste voorbeeld is $n_a=2$, $m_a=1$. In het tweede voorbeeld is $n_b=m_b=2$, $n_a=m_a=1$. In het derde voorbeeld is $n_a=4$, $m_a=2$. Het vierde voorbeeld geeft een onbegrensd gebied dat ontstaat door uit het platte vlak een holle lijn weg te laten.

In een randpunt a dat geen eindpunt is van een der krommen, is $n_a=2$ en $m_a=1$ of $m_a=2$.

Het is duidelijk, dat, als G conform op Γ wordt afgebeeld en als deze afbeelding continu op de rand zal kunnen worden voortgezet, we verwachten, dat dit alleen mogelijk is, als we elk randpunt a even vaak tellen als m_a bedraagt. Zo zal b.v. een "insnijding" als in het tweede voorbeeld "opengetrokken" worden. Onder deze restrictie plus

nog een restrictie voor ∞ bij onbegrensde gebieden, zullen we de continue voortzetbaarheid van de afbeeldingsfunctie op de rand nu inderdaad kunnen aantonen. Daartoe hebben we nog eerst enige hulpmiddelen nodig.

We kunnen een analytische functie $f(z)$ ook opvatten als twee reële functies van twee reële veranderlijken. Stellen we n.l. $w=f(z)$, $z=x+iy$, $w=u+iv$ (x,y,u,v reëel), dan is $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$. Voor deze functies gelden de differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Verder is $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$. Hieruit volgt dat de functionaaldeterminant van de twee functies $u(x,y)$ en $v(x,y)$ gelijk is aan $|f'(z)|^2$. Immers

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z)|^2.$$

De volgende stelling ontleen we aan de integraalrekening.

Als $f(z)$ het gebied G conform afbeeldt op het gebied B en V is een veelhoeksgebied, dat met zijn rand geheel binnen G ligt, dan is de oppervlakte van het beeld van V gelijk aan

$$\iint_V |f'(z)|^2 dx dy.$$

Als B bovendien begrensd is, bestaat voor deze integraal een bovengrens, die niet van de keuze van V afhangt (b.v. de oppervlakte van een vierkant dat B geheel insluit). Als a een punt is dat niet in V en niet op de rand van V ligt, kan door overgang op poolcoördinaten door $z=a+\rho e^{i\varphi}$ (ρ reëel ≥ 0 , φ reëel) de integraal in de vorm $\iint |f'(z)|^2 \rho d\rho d\varphi$ gebracht worden.

Als $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ reële integreerbare functies op het reële interval (a,b) zijn, dan geldt

$$\left(\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b (\varphi(x))^2 dx \cdot \int_a^b (\psi(x))^2 dx \quad (\text{ongelijkheid van Cauchy-Schwarz}).$$

Dit volgt direct uit het feit dat voor reële λ geldt

$$0 \leq \int_a^b (\varphi(x) + \lambda \psi(x))^2 dx = \int_a^b (\varphi(x))^2 dx + 2\lambda \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx + \lambda^2 \int_a^b (\psi(x))^2 dx.$$

Als G een enkelvoudig samenhangend gebied is, en C een compact deel van G , dan bestaat er een veelhoeksgebied V , dat met zijn rand geheel binnen G ligt en waarbinnen C ligt. Van deze stelling laten we

het bewijs achterwege.

Als G een gebied is, noemen we G^* het gebied, dat ontstaat door G in de reële as te spiegelen (G^* is dus de verzameling van de punten z , waarvoor \bar{z} in G ligt). Als nu $f(z)$ analytisch in G is, dan is $\overline{f(\bar{z})}$ analytisch in G^* .

Om dit aan te tonen merken we eerst op, dat $\overline{f(\bar{z})}$ uiteraard in G^* gedefinieerd is. Neem nu een a in G^* , dan ligt \bar{a} in G . Omdat $f(z)$ analytisch in G is, kunnen we in een zekere omgeving van \bar{a} schrijven

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - \bar{a})^n.$$

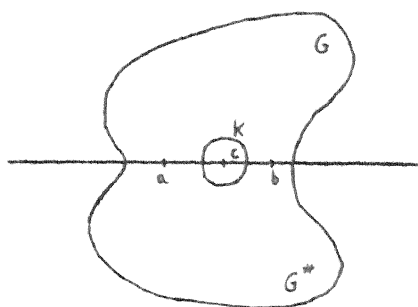
In een omgeving van a geldt dan

$$f(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\bar{z} - \bar{a})^n,$$

$$\overline{f(\bar{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{c}_n (z - a)^n$$

en hieruit volgt dat $\overline{f(\bar{z})}$ in a analytisch is.

Stelling 5.1. Als G een gebied in het bovenhalfvlak is, waarvan de rand een interval (a, b) van de reële as bevat, waarop een punt c ligt, waarin zich geen buiten de reële as gelegen randpunten van G verdichten, als $f(z)$ analytisch in G is en continu voortzetbaar op (a, b) met reële waarden aldaar, dan is $\overline{f(\bar{z})}$ (gedefinieerd op G^*) een analytische voortzetting van $f(z)$ (spiegelingsprincipe).

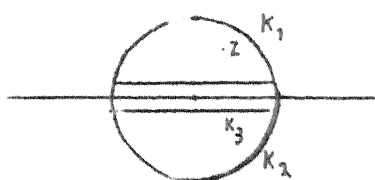


Bewijs: We definiëren $g(z)$ als volgt
 $g(z) = f(z)$ als z in G of z op (a, b) ,
 $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ als z in G^* .

Op grond van de gegevens is het dan duidelijk dat $g(z)$ overal waar hij gedefinieerd is continu is. Neem nu een cirkel K met middelpunt c , die zo klein is, dat a en b er buiten vallen en dat zijn op de reële as gelegen middellijn de randpunten van G binnen K vormen. Het gedeelte van het binnengebied van K boven (resp. beneden) de reële as behoort dan tot G (resp. G^*). Vorm nu

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{g(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

dan is $h(z)$ analytisch binnen K . Neem nu een punt z boven de reële as binnen K en kies twee lijnen evenwijdig met de reële as op gelijke af-



standen van deze as, dusdanig dat z boven de bovenste lijn ligt. Noem de afstand van deze lijnen tot de reële as ϵ . De inte-

graal over K is nu te splitsen in drie integralen, één over het bovenste cirkelsegment K_1 , één over het onderste cirkelsegment K_2 en één over het strookje langs de reële as K_3 . Omdat $g(z)$ in G analytisch is, is de bijdrage van K_1 gelijk aan $f(z)$; omdat $g(z)$ in G^* analytisch is, is de bijdrage van K_2 gelijk aan 0. Verder is het makkelijk aan te tonen, dat de bijdrage van K_3 tot nul nadert als $\varepsilon \rightarrow 0$. Hieruit volgt dat $h(z)=f(z)$. Op analoge wijze toont men aan dat $h(z)=\overline{f(\bar{z})}$ voor z beneden de reële as binnen K . Omdat $h(z)$ overal binnen K analytisch is, volgt hieruit, dat $\overline{f(\bar{z})}$ een analytische voortzetting van $f(z)$ is.

Door gebroken lineaire transformatie kunnen we stelling 5.1 nog uitbreiden. We kunnen (a,b) vervangen door een cirkelboog; G ligt dan geheel binnen of geheel buiten de cirkel C_1 , waar de boog op ligt. De waarden van $f(z)$ op deze boog zijn dan gelegen op een cirkel C_2 . De "gespiegelde" functie ontstaat door z in C_1 te spiegelen en de functiewaarde in C_2 . Er kunnen nu polen optreden, afkomstig van het middelpunt van C_2 . Ook kan men de voorwaarde dat G geheel in het bovenhalfvlak ligt (en de overeenkomstige voorwaarde bij cirkels), laten vervallen; de analytisch voortgezette functie kan dan meerwaardig worden.

Hulpstelling 5.1. Als $f(z)$ een conforme afbeelding van een gebied G op een gebied B tot stand brengt, als $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, als alle a_n in G liggen en a op de rand van G , en als $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = b$ bestaat, dan ligt b op de rand van B .

Bewijs. Omdat alle $f(a_n)$ in B liggen ligt b in B of op de rand van B . Stel dat b in B ligt. Als $g(w)$ de inverse afbeelding van $f(z)$ is, dan is $g(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(a_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Dit geeft een contradictie, want $g(b)$ ligt in G en a ligt op de rand van G . Dus b ligt op de rand van B .

We gaan nu de continue voortzetting van de afbeeldingsfunctie tot stand brengen. Stel dat $f(z)$ een conforme afbeelding van een enkelvoudig samenhangend gebied G op een enkelvoudig samenhangend gebied B tot stand brengt. We veronderstellen dat G en B beide aan voorwaarde (A) voldoen. Verder veronderstellen we voorlopig, dat G en B beide begrensd zijn. De inverse functie van $f(z)$ noemen we $g(w)$. Laat R de rand van G en S de rand van B zijn.

Neem een punt a van R en een in a eindigende kromme in G . Een dergelijke kromme bestaat omdat G aan (A) voldoet. Door de kromme eventueel wat in te korten, kunnen we verkrijgen, dat de hele kromme binnen de cirkel met straal r_a en middelpunt a ligt. De hele kromme ligt dan in één van de m_a bij a behorende gebieden (uitgezonderd het punt a zelf). Laat deze kromme gegeven zijn door de parametervoorstelling $z = \varphi(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $\varphi(t)$ continu, $\varphi(t)$ in G voor $0 \leq t < 1$ en $\varphi(1) = a$. We beschouwen nu de beeldkromme $w = f(\varphi(t))$; we zullen aantonen, dat $\lim_{t \rightarrow 1} f(\varphi(t))$ bestaat.

Veronderstel dat $\lim_{t \rightarrow 1} f(\varphi(t))$ niet bestaat. Neem een willekeurige oneindige rij $\{\lambda_n\}$ met $0 \leq \lambda_n < 1$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 1$. De rij $\{f(\varphi(\lambda_n))\}$ is begrensd en bezit dus een convergente deelrij. Er is dus een rij $\{\xi_n\}$ met $0 \leq \xi_n < 1$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 1$ waarvoor $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\varphi(\xi_n)) = c$ bestaat. Omdat $\lim_{t \rightarrow 1} f(\varphi(t)) = c$ niet geldt, is er een $\alpha > 0$ en een rij $\{\mu_n\}$ met $0 \leq \mu_n < 1$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 1$, zodat $|f(\varphi(\mu_n)) - c| \geq \alpha$. Door van de rij $\{\mu_n\}$ een deelrij te nemen, kunnen we een rij $\{\eta_n\}$ verkrijgen met $0 \leq \eta_n < 1$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 1$, waarvoor $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\varphi(\eta_n)) = d$ bestaat en $|c - d| \geq \alpha$, dus zeker $c \neq d$. Uit hulpstelling 5.1 volgt, dat c en d in S liggen.



Neem een cirkel K_1 met middelpunt c en een cirkel K_2 met middelpunt d , zodat de twee cirkels buiten elkaar liggen en zodat de straal van $K_1 \leq r_c$ en de straal van $K_2 \leq r_d$ is. De doorsnede van K_1 en B bestaat dan uit m_c cirkelbogen en de doorsnede van K_2 met B uit m_d cirkelbogen. Er bestaat nu een positief getal δ zodat de afstand van een willekeurig punt op K_1 en een willekeurig punt op $K_2 \geq \delta$ is.

Er is nu een ξ_n , waarvoor $f(\varphi(\xi_n))$ binnen K_1 ligt; er is dan ook een $\eta_m > \xi_n$, waarvoor $f(\varphi(\eta_m))$ binnen K_2 ligt. De kromme $f(\varphi(t))$ voor $\xi_n \leq t \leq \eta_m$ snijdt K_1 en K_2 beide. Er is nu een $\xi_p > \eta_m$, waarvoor $f(\varphi(\xi_p))$ binnen K_1 ligt enz. Op deze wijze komen we tot twee rijen $\{\sigma_n\}$ en $\{\tau_n\}$ met $0 \leq \sigma_n < 1$, $0 \leq \tau_n < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = 1$, alle $f(\varphi(\sigma_n))$ op K_1 en wel op dezelfde der m_c cirkelbogen en alle $f(\varphi(\tau_n))$ op K_2 en wel op dezelfde der m_d cirkelbogen.

Stel nu $\varphi(\sigma_1) = s_1$, $f(\varphi(\sigma_1)) = u_1$, $\varphi(\tau_1) = t_1$, $f(\varphi(\tau_1)) = v_1$. Kies een $P > 0$ zodat $|s_1 - a| > P$ en $|t_1 - a| > P$. Kies verder een ε met $0 < \varepsilon < P$. Noem K_ε (resp. K_P) de cirkel met middelpunt a en straal ε (resp. straal P). Kies nu n zo groot dat $\varphi(\sigma_n) = s_2$ en $\varphi(\tau_n) = t_2$ binnen K_ε liggen. Noem $f(s_2) = u_2$ en $f(t_2) = v_2$. Een van beide cirkelbogen $u_1 u_2$ van K_1 ligt geheel binnen B , noem deze B_1 ; analoog B_2 de cirkelboog $v_1 v_2$ van K_2 die geheel binnen B ligt. Beeld B_1 en B_2 met behulp van $g(w)$ af. Dit geeft continue krommen C_1 en C_2 binnen G , die resp. s_1 met s_2 en t_1 met t_2 verbinden.

Voor iedere ρ met $\varepsilon \leq \rho \leq P$ snijdt de cirkel K_ρ met middelpunt a en straal ρ elk van de krommen C_1 en C_2 minstens één keer binnen datgene der m_a gebieden waar s_1, t_1, s_2 en t_2 binnen liggen. Stel dat s_ρ en t_ρ zulke snijpunten zijn, dan ligt $f(s_\rho)$ op K_1 en $f(t_\rho)$ op K_2 , dus $|f(s_\rho) - f(t_\rho)| \geq \delta$. Een der beide cirkelbogen $s_\rho t_\rho$ op K_ρ ligt binnen G .

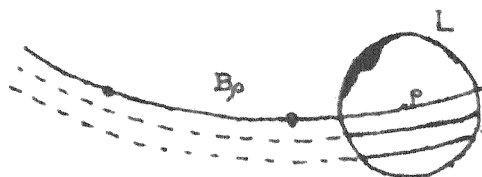
We stellen nu voor punten op K_ρ : $\zeta = a + \rho e^{i\varphi}$ en wel $s_\rho = a + \rho e^{i\varphi_1}$ en $t_\rho = a + \rho e^{i\varphi_2}$. Neem aan dat de in positieve zin doorlopen boog van s_ρ naar t_ρ binnen G ligt (het andere geval gaat analoog); we kiezen dan $\varphi_2 - 2\pi < \varphi_1 < \varphi_2$. Dan is

$$\delta \leq |f(t_\rho) - f(s_\rho)| = \left| \int_{\substack{\text{boog} \\ \text{van } K_\rho}} f'(\zeta) d\zeta \right| = \left| \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f'(a + \rho e^{i\varphi}) \rho e^{i\varphi} d\varphi \right| \leq \rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} |f'(\zeta)| d\varphi.$$

Met behulp van de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz volgt hieruit:

$$\frac{\delta^2}{\rho^2} \leq \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} |f'(\zeta)| d\varphi \right)^2 \leq \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} |f'(\zeta)|^2 d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \leq 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} |f'(\zeta)|^2 d\varphi.$$

Bij K_ρ hebben we een boog $B_\rho = s_\rho t_\rho$ gevonden. Voegen we deze B_ρ voor $\varepsilon \leq \rho \leq P$ samen tot een verzameling W , dan ligt W binnen G . De afsluiting \bar{W} van W , die ontstaat door aan W al zijn verdichtingspunten toe te voegen ligt echter ook nog geheel binnen G . Een verdichtingspunt p van W ligt uiteraard in G of op de rand R van G . Stel dat p op R ligt. Dan is er een rij punten $p_n = a + \rho_n e^{i\varphi_n}$ in W met $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p = a + \rho e^{i\varphi}$. Dan geldt $\varepsilon \leq \rho \leq P$. Er is een cirkel L met middelpunt p , waar geen punten van C_1 of C_2 binnen liggen. Verder geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \rho$; er zijn dus oneindig veel n waarvoor $\rho_n > \rho$ of oneindig veel ρ_n , waarvoor $\rho_n < \rho$. We behandelen het eerste geval.



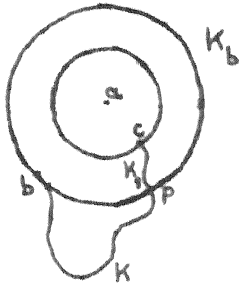
Op L liggen eindig veel randpunten van p (als L klein genoeg genomen wordt); als ρ_n dicht genoeg bij ρ is, liggen deze buiten K_ρ . Als n groot genoeg is, ligt p_n binnen L . Dan ligt de binnen L gelegen boog van K_ρ geheel binnen G . Omdat G enkelvoudig samenhangend is ligt dan ook het gedeelte binnen L en tussen twee K_ρ 's binnen G en dus ook het gedeelte binnen L en tussen K_ρ en K_ρ binnen G . Het is makkelijk na te gaan, dat dit in strijd met voorwaarde (A) is.

Dus ligt \bar{W} binnen G ; verder is \bar{W} begrensd en gesloten, dus compact. Er is dus een veelhoeksgebied V dat binnen G ligt en waarbinnen \bar{W} ligt. Laat A een van V onafhankelijke bovengrens voor de inhoud van het beeld van V bij de conforme afbeelding zijn. Dan is

$$A \geq \iint_V |f'(\zeta)|^2 \rho d\rho d\varphi \geq \int_{\varepsilon}^P \frac{\delta^2}{2\pi \rho^2} \rho d\rho = \frac{\delta^2}{2\pi} (\log P - \log \varepsilon).$$

Door ε dicht genoeg bij 0 te kiezen, vinden we een tegenstrijdigheid. Hiermee is bewezen dat $\lim_{t \rightarrow 1} f(\varphi(t))$ bestaat; op grond van hulpstelling 5.1 ligt deze limiet $t \rightarrow 1$ op S .

Twee krommen in G die in a eindigen en die in hetzelfde van de m_a gebieden liggen geven dezelfde limiet, omdat we een derde kromme in G kunnen maken, die in a eindigt, en die van elk van beide krommen willekeurig dicht bij a gelegen punten bevat. Dit berust op het feit, dat als b en c twee punten van hetzelfde der m_a gebieden zijn, er een kromme binnen G bestaat die b en c verbindt, zodat voor alle punten z van deze kromme geldt $|z-a| \leq \max(|b-a|, |c-a|)$. Om dit aan te tonen mogen we $|b-a| \geq |c-a|$ veronderstellen. Omdat G een gebied is is er een kromme K binnen G die b met c verbindt. Laat p het "laatste" snijpunt van K met de cirkel



K_b ($|z-a| = |b-a|$) zijn (het is mogelijk, dat $p=b$). Het stuk K_1 voorbij p ligt dan geheel binnen K_b en dus ook binnen dat-

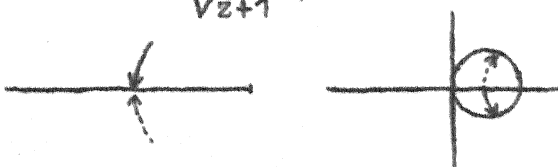
gebied der m_a gebieden, waar b en c in liggen. Dus p ligt ook in dit gebied. Een van de cirkelbogen bp van de cirkel K_b ligt dus binnen G . Doorloopt men deze cirkelboog van b naar p en vervolgens K_1 van p naar c , dan heeft men een kromme die aan de vereisten voldoet.

Tellen we elk punt a van R nu m_a keer, dan noemen we dit R^* . Analogie krijgen we S^* . We hebben nu gevonden, dat we de functie $f(z)$ kunnen voortzetten tot een afbeelding van R^* in S^* . Door de rollen van G en B te verwisselen vinden we dat dit een eeneenduidige afbeelding van R^* op S^* is. Verder is de uitgebreide afbeelding op G en R^* samen continu en eveneens de inverse afbeelding op B en S^* samen. Hiermee is de continue voortzetting van de afbeelding tot stand gebracht.

We beschouwen nu een onbegrensd enkelvoudig samenhangend gebied G , dat aan de voorwaarde (A) voldoet en niet het hele complexe vlak is. Omdat G niet het hele complexe vlak is, is er een complex getal α dat niet in G ligt. Kies verder een punt p in G . De functie $\sqrt{z-\alpha}$ kan als een eenwaardige eeneenduidige analytische functie in G verklaard worden, die vast ligt als we een keuze voor $\sqrt{p-\alpha}$ doen. De afbeelding

$$w = \frac{1}{\sqrt{z-\alpha} + \sqrt{p-\alpha}}$$

beeldt G conform af op een begrensd gebied B (zie het bewijs van hulpstelling 4.1). Deze afbeelding is (behalve eventueel in α) ook nog langs een in een randpunt a eindigende kromme in G analytisch voort te zetten. Nadert men a echter in verschillende der m_a gebieden, dan kan het beeldpunt verschillend zijn. Voorbeeld: G is het complexe vlak met daaruit 0 en de negatieve reële as weggelaten. Neem $\alpha=0$, $p=1$. De afbeelding $w = \frac{1}{\sqrt{z+1}}$ (hoofdwaaarde van \sqrt{z}) beeldt G af op het gebied



$|w-\frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$. Als men van de bovenkant (resp. benedenkant) tot de negatieve reële as nadert, nadert het beeld-

punt tot een beneden (resp. boven) de reële as gelegen punt van de cirkel.

Als het punt α een randpunt van G is, is de afbeelding in α nog wel continu (in ons voorbeeld correspondeert $z=\alpha=0$ met $w=1$). Het is verder makkelijk na te gaan dat B ook aan de voorwaarde (A) voldoet. De inverse functie

$$z = \frac{pw^2 - 2w\sqrt{p-\alpha} + 1}{w^2}$$

is in het hele complexe vlak analytisch met uitzondering van $w=0$. Dit laatste punt is echter wel een randpunt van B ; dit correspondeert met $z = \infty$.

Als G met zijn rand samen niet het hele complexe vlak is, kiezen we voor het gemak α niet op de rand van G (in het bovenstaande voorbeeld lukt dat niet). Verder kan bovenstaande constructie ook worden toegepast als G begrensd is. De enige wijziging in het bovenstaande is, dat $w=0$ dan geen randpunt van B is.

Door de bovenstaande resultaten te combineren kunnen we de continue voortzetbaarheid nu ook voor willekeurige (eventueel onbegrensde) gebieden G en B , die aan de voorwaarde (A) voldoen, behandelen. Laat φ een conforme afbeelding van G op B zijn. We nemen afbeeldingen ψ_1 en ψ_2 van G op G_1 en van B op B_1 van het hierboven besproken type, waarbij G_1 en B_1 dus begrensd zijn. De afbeelding $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ is een conforme afbeelding van het begrensde gebied G_1 op het begrensde gebied B_1 . Deze is, omdat G_1 en B_1 aan de voorwaarde (A) voldoen, continu voort te zetten op de randen R_1^* en S_1^* van G_1 en B_1 (randpunten zo nodig meervoudig geteld). Nu schrijven we $\varphi = \psi_2^{-1}(\psi_2 \circ \psi_1^{-1})\psi_1$. De afbeelding ψ_1 is continu voort te zetten op de rand R^* van G , waarbij echter, als G onbegrensd is, het randpunt 0 van G_1 niet als beeld optreedt. Daarna passen we de door $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ geïnduceerde afbeeldingen van R_1^* op S_1^* toe. Eventueel correspondeert met het randpunt 0 van R_1^* een eindig aantal (en wel m_0 genomen voor 0 in R_1^*) punten van S_1^* . Ten slotte is ψ_2^{-1} continu voort te zetten op S_1^* , echter, als B onbegrensd is, met uitzondering van het punt 0 .

Door dit alles samen te stellen vinden we dat de afbeelding φ continu voort te zetten is tot een eeneenduidige afbeelding van R^* op S^* , echter, als B onbegrensd is, eventueel met een eindig aantal uitzonderingspunten op R , die met ∞ corresponderen en, als G onbegrensd is, eventueel met een eindig aantal uitzonderingspunten op S^* , die met ∞ corresponderen.

Veronderstel, dat G aan voorwaarde (A) voldoet en dat $B=\mathbb{P}$. Stel dat het randpunt a van G geen eindpunt is en gelegen is op een analytisch stuk randkromme $z=\varphi(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $\varphi(\tilde{t})=a$, $0 < \tilde{t} < 1$, $\varphi(t)$ analytisch en $\varphi'(t) \neq 0$. Laat verder een conforme afbeelding $f(z)$ van G op

Γ gegeven zijn; in overeenstemming met het bovenstaande denken we ons deze al continu voortgezet op de rand R^* van G .

Er is nu een omgeving U van \bar{a} in het t -vlak, waarbinnen $\varphi(t)$ (t is complex!) analytisch en eeneenduidig en dus conform is. De punten van de reële as worden in randpunten



van G afgebeeld. Door U voldoende klein te kiezen, kunnen we bereiken, dat geen van de andere punten van U in een randpunt van G wordt afgebeeld. Dan wordt minstens één van de beide helften waarin U door de reële as wordt verdeeld, geheel binnen G afgebeeld. Stel dat dit de bovenste helft $\text{Im } t > 0$ is. Dan is $f(\varphi(t))$ gedefinieerd en continu voor t in U en $\text{Im } t \geq 0$, analytisch voor t in U en $\text{Im } t > 0$; verder geldt voor reële t in U dat $f(\varphi(t))$ op de eenheidscirkel ligt. Op grond van het spiegelingssprincipe kan $f(\varphi(t))$ analytisch worden voortgezet in U en dus $f(z)$ in het beeld van U bij de afbeelding $\varphi(t)$ (want $f = f \circ \varphi \circ \varphi^{-1}$). In het bijzonder is $f(z)$ dus analytisch in a .

Als G en B beide aan (A) voldoen en a en $f(a)$ zijn beide geen randpunten en wel gelegen op een analytisch stuk randkromme, dan is $f(z)$ analytisch voor $z=a$ en $g(w)$ analytisch voor $w=f(a)$. Dit ziet men in door de afbeelding in twee stappen via Γ te laten verlopen.

Tenslotte bewijzen we nog de volgende stelling, die vaak nuttig is om te bewijzen dat een bepaalde analytische functie een conforme afbeelding tot stand brengt.

Stelling 5.2. Laat C een enkelvoudige gesloten weg zijn en $f(z)$ analytisch op en binnen C . Laat verder het beeld van C bij $f(z)$ een enkelvoudige gesloten weg C_1 zijn, die eenmaal doorlopen wordt als C eenmaal doorlopen wordt. Dan is $f(z)$ eeneenduidig binnen C en brengt een conforme afbeelding van het binnengebied van C op het binnengebied van C_1 tot stand. Als C in positieve zin doorlopen wordt, wordt C_1 ook in positieve zin doorlopen.

Bewijs: Neem een w_0 die niet op C_1 ligt. Dan vinden we door transformatie van integralen:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z) dz}{f(z) - w_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{dw}{w - w_0}.$$

Hierbij nemen we C in positieve zin doorlopen; C_1 wordt in de met C corresponderende zin (op grond van de afbeelding $w=f(z)$) doorlopen.

Het linkerlid van deze ongelijkheid is gelijk aan de som van de multipliciteiten van de nulpunten van de functie $f(z) - w_0$; dat is in ieder geval een geheel getal ≥ 0 . Het rechterlid is nul als w_0 buiten C_1 ligt en ± 1 als w_0 binnen C_1 ligt ($+$ naar gelang C_1 in positieve of negatieve zin doorlopen wordt). De uitkomst -1 is onmogelijk; dus C_1 wordt in positieve zin doorlopen. Dus als w_0 buiten C_1 ligt neemt

$f(z)$ de waarde w_0 binnen C niet aan en als w_0 binnen C_1 ligt neemt $f(z)$ de waarde w_0 binnen C precies éénmaal aan. Een waarde w_0 op C_1 kan $f(z)$ binnen C niet aannemen, omdat de functie anders in een omgeving van het punt waar zij w_0 aannam ook waarden buiten C_1 zou aannemen. Daarmee is de stelling bewezen.

Cursus Conforme Afbeelding
te

Geleen-Lutterade

1956-'57

Toepassingen
door

G.W. Veltkamp

§1. Inleiding.

1.1. Potentiaalproblemen in de mathematische physica.

In vele gebieden van de mathematische physica komt men situaties tegen die beschreven kunnen worden met functies die voldoen aan de potentiaalvergelijking (vergelijking van Laplace)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

We noemen er enkele.

A. Warmtegeleiding (stationair).

In vaste stoffen wordt de stroming van warmte onder invloed van een temperatuur-verval beschreven door de wet van Fourier

$$q_1 = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_2 = -k \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_3 = -k \frac{\partial T}{\partial z},$$

of in vector-vorm

$$\vec{q} = -k \text{ grad } T, \quad (2)$$

waarin $T(x,y,z)$ de temperatuur, $\vec{q}(x,y,z)$ de stroomsterkte (aantal eenheden van warmte per eenheid van tijd en eenheid van oppervlak door een oppervlak loodrecht op de stroomrichting) en k een evenredigheidsconstante is, die bij homogene materialen onafhankelijk van de plaats is. Verder geldt voor stationaire stroming een "behoud wet"

$$\frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{\partial q_3}{\partial z} = 0, \quad \text{of} \quad \text{div } \vec{q} = 0 \quad (3)$$

die uitdrukt dat geen warmte verloren gaat of geproduceerd wordt.

Substitutie van (2) en (3) levert

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad \text{of} \quad \Delta T = \text{grad div } T = 0,$$

zodat T dus aan een vergelijking van het type (1) voldoet.

B. Electrische stroming in een metaal (stationair).

Hier geldt de wet van Ohm

$$\vec{i} = - \sigma \text{ grad } \varphi$$

(\vec{i} = stroomdichtheid, σ = geleidingsvermogen, φ = potentiaal).

Verder geldt weer $\text{div } \vec{i} = 0$, en dus $\Delta \varphi = 0$.

C. Diffusie (stationair).

Wet van Fick: $\vec{q} = - D \text{ grad } c$

(\vec{q} = diffusie snelheid, D = diffusie constante, c = concentratie).

Verder $\text{div } \vec{q} = 0$, en dus $\Delta c = 0$.

D. Stroming door poreuse media (stationair).

Wet van Darcy: $\vec{q} = - k \text{ grad } \varphi$

(\vec{q} = filtersnelheid, k = permeabiliteit, φ = potentiaal).

Verder $\text{div } \vec{q} = 0$ en dus $\Delta \varphi = 0$.

E. Electrostatica.

Voor de electrische veldsterke \vec{E} , geldt

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad \left(= \frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z}, \frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x}, \frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} \right)$$

waaruit volgt dat er een electrostatistische potentiaal φ bestaat, zodanig dat

$$\vec{E} = - \text{grad } \varphi$$

Verder geldt, indien geen vrije lading aanwezig is, voor de dielectrische verplaatsing \vec{D}

$$\text{div } \vec{D} = 0.$$

Uit $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, waarin ϵ de dielectrische constante is, volgt dan weer, als ϵ niet van de plaats afhangt, $\text{div } \vec{E} = - \Delta \varphi = 0$.

F. Magnetostatica.

Voor magnetische veldsterke \vec{H} en de magnetische inductie \vec{B} geldt:

$$\text{rot } \vec{H} = 0, \text{div } \vec{B} = 0, \vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\mu = \text{permeabiliteit}).$$

G. Voor rotatievrije stroming van een ideale vloeistof (incompressibel en niet visceus) geldt $\text{rot } \vec{v} = 0$, $\text{div } \vec{v} = 0$ en dus $\vec{v} = - \text{grad } \varphi$, $\Delta \varphi = 0$.

Uit deze opsomming blijkt dat er een grote analogie bestaat tussen geheel verschillende verschijnselen (die ogenschijnlijk alleen gemeen hebben dat ze stationair zijn en dat de materiaal-constante onafhankelijk van x, y en z werd verondersteld).

In alle gevallen is de stroming divergentie vrij (behoudwet). Ook is de stroming rotatievrij, dus een potentiaal-stroming (snelheid = gradient van een potentiaal). In de gevallen A t/m D volgt dit uit een

empirische weerstandswet (Fourier, Ohm, Fick, Darcy), in de overige gevallen omdat het rotatievrij zijn als natuurwet of als beperkende hypothese (geval G) gegeven is.

Zoals bekend heeft de potentiaalvergelijking (1) vele oplossingen en eenduidigheid wordt pas verkregen door op grond van de fysische situatie bepaalde randvoorwaarden te formuleren. Ook hier blijken vergaande analogieën tussen de bovenbeschouwde gebieden op te treden.

1.2. Twee-dimensionale problemen. Stroomfunctie. Verband met functietheorie.

In al het volgende zullen slechts twee-dimensionale problemen worden beschouwd; dat zijn problemen waarbij de optredende functies slechts van twee cartesische coördinaten afhangen. Dit is b.v. het geval indien het gebied waarin de stroming plaats vindt begrensd wordt door twee evenwijdige ondoordringbare vlakken, terwijl de overige randen alle loodrecht hier opstaan en de hier geldende randvoorwaarden niet variëren in de richting loodrecht op de vlakken. Ook kan een tweedimensionaal probleem een benadering zijn van een in wezen driedimensionaal probleem, waarbij de afmetingen in één richting zeer veel groter zijn dan in de andere richtingen (b.v. stroming om een vleugelprofiel). De handelbaarheid van twee-dimensionale potentiaalproblemen is nl. zoveel groter, dat men gaarne over de bezwaren van een niet geheel juist beeld heenstapt (of die achteraf door correcties ondervangt).

Definitie. Een functie $\phi(x,y)$ heet harmonisch in een zeker gebied G van het x,y -vlak indien

- a. $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ en $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$ (en dus zeker ϕ , $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ en $\frac{\partial \phi}{\partial y}$) bestaan en continu zijn in G ;
- b. $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$ in G .

Zij $\phi(x,y)$ harmonisch in een enkeltvoudig samenhangend gebied G . We kunnen $\phi(x,y)$ opvatten als potentiaal van een twee-dimensionale stroming

$$q_1 = - \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad q_2 = - \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (\text{of } \vec{q} = - \text{grad } \phi). \quad (1)$$

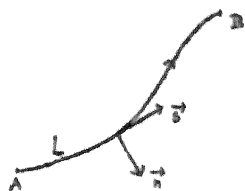
Op grond van de bovenstaande definitie zijn $\frac{\partial q_1}{\partial x}$ en $\frac{\partial q_2}{\partial y}$ continu in G en

$$\text{div } \vec{q} = \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad (2)$$

zodat de stroming divergentie-vrij is.

We willen nu een stroomfunctie invoeren. Daartoe beschouwen we eerst een geheel in G verlopende continu differentieerbare weg L die

twee punten A en B uit G verbindt. De hoeveelheid "vloeistof" die per tijdseenheid door L gaat is



$$Q_{AB} = \int_{(L)} q_n ds, \quad (3)$$

waarbij q_n de component van \vec{q} is in de richting van de normaal in een punt van de weg

(we zullen bij een georiënteerde weg de normaal-vector steeds kiezen in de richting die 90° "terug" gedraaid is ten opzichte van de raakvector).

Op grond van het divergentie theorema van Gauss (dat geldt als $\text{div } \vec{q}$ continu is) geldt voor een gesloten weg

$$\oint_L q_n ds = \iint_{G(L)} \text{div } \vec{q} dx dy = 0,$$

waarbij $G(L)$ het door de weg omsloten gebied is.

Hieruit volgt direct dat Q_{AB} onafhankelijk is van de gekozen weg (mits deze geheel binnen G verloopt).

Kies nu een vast punt (x_0, y_0) in G en zij

$$\psi(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} q_n ds. \quad (4)$$

Volgens het bovenstaande hangt $\psi(x, y)$ slechts van (x, y) en het vaste punt (x_0, y_0) af, niet van de integratieweg. Na keuze van (x_0, y_0) is $\psi(x, y)$ dus in geheel G eenduidig bepaald. $\psi(x, y)$ is kennelijk continu in G . Om de differentieerbaarheid na te gaan beschouwen we de uitdrukking

$\frac{1}{h} \{ \psi(x+h, y) - \psi(x, y) \}$ met $h \neq 0$. Daar $\psi(x, y)$ onafhankelijk is van de integratieweg in (4), kunnen we deze eerst van (x_0, y_0) naar (x, y) laten gaan en dan langs een rechte lijn van (x, y) naar $(x+h, y)$, zodat

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \{ \psi(x+h, y) - \psi(x, y) \} &= - \frac{1}{h} \int_{(x, y)}^{(x+h, y)} q_n ds = \frac{1}{h} \int_{(x, y)}^{(x+h, y)} q_2 dx = \\ &= q_2(x + \theta h, y), \text{ met } 0 < \theta < 1, \text{ daar } q_2 \text{ continu is.} \end{aligned}$$

Conclusie: $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ bestaat en is gelijk aan $q_2 = - \frac{\partial \phi}{\partial x}$.

Analoog vindt men $\frac{\partial \psi}{\partial y} = -q_1 = \frac{\partial \phi}{\partial y}$.

De functies $\psi(x, y)$ voldoet dus aan de differentiaalvergelijkingen

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5)$$

Omgekeerd: als ook de functie $\psi^*(x,y)$ voldoet aan (5) (bij gegeven $\phi(x,y)$), dan geldt klaarblijkelijk $\frac{\partial}{\partial x}(\psi - \psi^*) = 0$, $\frac{\partial}{\partial y}(\psi - \psi^*) = 0$, en dus $\psi^* = \psi + \text{const.}$

Samenvattend.

Stelling 1. Zij $\phi(x,y)$ harmonisch in een enkelvoudig samenhangend gebied G . Dan bestaat in G een op een additieve constante na eenduidig bepaalde continu differentieerbare functie $\psi(x,y)$, zodanig dat (5) geldt.

Uit (3) en (4) volgt

$$Q_{AB} = \psi_A - \psi_B \quad . \quad (6)$$

Verder is $d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = q_2 dx - q_1 dy$, waaruit volgt dat de lijnen $\psi = \text{const.}$ stroomlijnen zijn (waar $dy = dx = q_2 : q_1$), die loodrecht op de aequipotentiaallijnen (waar $d = -q_1 dx - q_2 dy = 0$ en dus $dy : dx = -q_1 : q_2$) staan.

Op grond hiervan zal $\psi(x,y)$ de stroomfunctie worden genoemd.

We herinneren nu aan de volgende stelling uit het begin van de functie-theorie:

Als $\phi(x,y)$ en $\psi(x,y)$ in een gebied G van het x,y -vlak continu differentieerbaar zijn en voldoen aan (5) (differentiaalvergelijkingen van Cauchy en Riemann) dan is $\Omega(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$ een analytische functie van $z = x + iy$ in het met G corresponderende deel G_z van het complexe z -vlak. Ook het omgekeerde geldt: Als $\Omega(z)$ analytisch is in G_z dan voldoen $\phi(x,y) = \text{Re } \Omega(z)$ en $\psi(x,y) = \text{Im } \Omega(z)$ aan (5).

Combinatie van deze stelling met stelling 1 levert

Stelling 2. Als $\phi(x,y)$ harmonisch is in een enkelvoudig samenhangend gebied G dan bestaat in het corresponderende gebied G_z een op een additieve imaginaire constante na eenduidig bepaalde analytische functie $\Omega(z)$ zodanig dat $\phi(x,y) = \text{Re } \Omega(z)$. Voor de bij ϕ behorende stroomfunctie(s) geldt $\psi(x,y) = \text{Im } \Omega(z) (+ \text{const.})$.

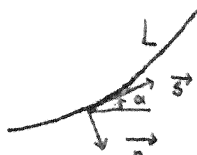
We trekken hieruit enkele eenvoudige, doch belangrijke conclusies.

- Iedere harmonische functie is oneindig vaak continu differentieerbaar en alle differentiaal-quotienten zijn harmonisch.
- Reële en imaginaire deel van een analytische functie zijn harmonisch.
- De functies $\psi(x,y)$, $q_1(x,y)$ en $q_2(x,y)$ zijn harmonisch.
- De functie $q(z) = q_1(x,y) - iq_2(x,y) = -\frac{d\Omega}{dz}$ is een analytische functie van z (let op het minteken).
- Indien nergens in G_z $\frac{d\Omega}{dz} = 0$ is, dan geeft de functie $\Omega_b = \Omega(z)$ een conforme afbeelding van G_z op een gebied G_Ω van het

$\Omega = \phi + i\psi$ -vlak. Is de rand van G_z voldoende "netjes" (b.v. bestaande uit eindig veel continu-differentieerbare wegen) dan wordt deze op de rand van G afgebeeld. Hier ligt de basis van een groot aantal toepassingen van de conforme afbeelding op twee-dimensionale potentiaalproblemen. Vaak kent men nl. a priori de rand van G_Ω . Kan men dan een functie $f(z)$ vinden, die analytisch is in G_z en de rand van G_z op die van G_Ω afbeeldt met behoud van de omloopzin, dan beeldt $f(z)$ het gebied G_z op G_Ω af en dus is $\Omega = f(z)$.

f. Zij $w = f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ een analytische functie van z die een gebied G_z conform afbeeldt op een gebied G_w . Zij $\phi(u,v)$ harmonisch in G_w . Dan is $\phi^*(x,y) = \phi(u(x,y), v(x,y))$ harmonisch in G_z . Hier ligt de tweede toepassingsmogelijkheid van de conforme afbeelding. Heeft men een potentiaalprobleem in een ingewikkeld gebied G_z in het z -vlak, dat afgebeeld kan worden op een eenvoudig gebied G_w (cirkel of half vlak) in het w -vlak, dan kan vaak het gestelde probleem in G_w wel worden opgelost. Is het resultaat $\phi(u,v)$, dan is $\phi^*(x,y)$ de oplossing van het oorspronkelijke probleem.

g. Voor het volgende zijn de onderstaande formules nuttig. Zij L een continu differentieerbare kromme in G_z en zij $\vec{s} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, resp. $\vec{n} = (\sin \alpha, -\cos \alpha)$ raakvector, resp. normaalvector in een zeker punt van L



$$\text{Uit } \frac{d\Omega}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = -i \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} =$$

(met Cauchy-Riemann)

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

volgt:

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \phi}{\partial y} \sin \alpha = \operatorname{Re}(e^{i\alpha} \frac{d\Omega}{dz})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \sin \alpha - \frac{\partial \phi}{\partial y} \cos \alpha = \operatorname{Im}(e^{i\alpha} \frac{d\Omega}{dz})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \psi}{\partial y} \sin \alpha = \operatorname{Im}(e^{i\alpha} \frac{d\Omega}{dz})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \sin \alpha - \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos \alpha = -\operatorname{Re}(e^{i\alpha} \frac{d\Omega}{dz})$$

$$\text{En dus } \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial s}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial s} = -\frac{\partial \psi}{\partial n}$$

(gegeneraliseerde vergelijkingen van Cauchy-Riemann).

Verder geldt natuurlijk

$$q_s = -\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \psi}{\partial n}, \quad q_n = -\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\partial \psi}{\partial s}.$$

§2. Stromingen met eenvoudige randvoorwaarden.

2.1. Inleiding. Voorbeelden.

We behandelen hier gevallen waarbij de begrenzing van het "stromingsveld" gedeeltelijk bestaat uit een of meer wanden waarlangs de potentiaal een gegeven constante waarde heeft en voor het overige uit een aantal ondoordringbare wanden, waar $q_n=0$ en dus de stroomfunctie ψ een constante waarde heeft. De waarden van deze constanten behoren in het algemeen tot de onbekenden van het vraagstuk. Daar ψ slechts op een additieve constante na eenduidig bepaald is, kan op één der ondoordringbare wanden de waarde van ψ worden gekozen.

Alvorens tot een enigszins systematische behandeling over te gaan, bespreken we twee voorbeelden.

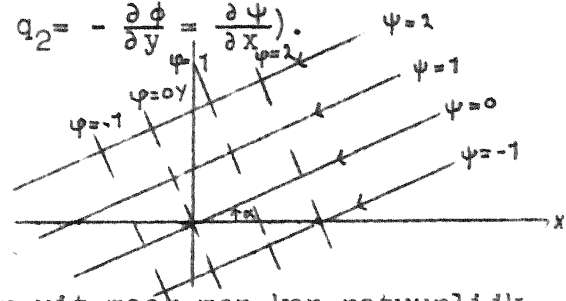
a. Beschouw de complexe potentiaal

$$\Omega(z) = Ae^{-i\alpha} z \quad (\alpha \text{ reëel}). \quad (1)$$

Hierbij behoort $q(z) = -\frac{d\Omega}{dz} = -Ae^{-i\alpha}$ en dus $\phi = \text{Re } \Omega = A(x \cos \alpha + y \sin \alpha)$, $\psi = \text{Im } \Omega = A(-x \sin \alpha + y \cos \alpha)$, $q_1 = \text{Re } q = -A \cos \alpha$, $q_2 = -\text{Im } q = -A \sin \alpha$

(en natuurlijk geldt $q_1 = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $q_2 = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$).

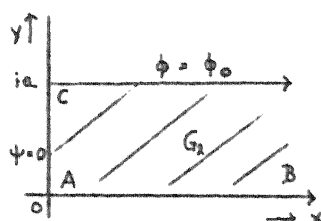
Dit is klaarblijkelijk de potentiaal van een uniform stromingsveld, waarvan de snelheid de hoek α met de negatieve x-as maakt.



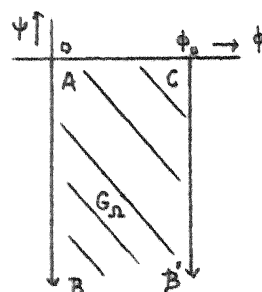
Het veld steekt zich oneindig ver uit maar men kan natuurlijk b.v. ook het geval beschouwen waarbij het veld alleen fysische realiteit heeft voor $-x \sin \alpha + y \cos \alpha > 0$; langs de rand $-x \sin \alpha + y \cos \alpha = 0$ is dan voldaan aan de randvoorwaarde $\psi = 0$.

b. Ook op andere wijze kan men stukjes uit het veld (1) knippen. Zoekt men b.v. het stromingsveld in het gebied $0 < y < a$, $x > 0$, waarvoor voor $y=0$: $\phi = 0$ en voor $y=a$: $\phi = \phi_0$, terwijl het lijnstuk $x=0$, $0 < y < a$ een ondoorlatende wand, waarlangs we $\psi = 0$ zullen kiezen, dan voldoet klaarblijkelijk

$$\Omega = -i \frac{z}{a} \phi_0 \quad (\text{en dus } \phi = \frac{y}{a} \phi_0, \psi = -\frac{x}{a} \phi_0)$$



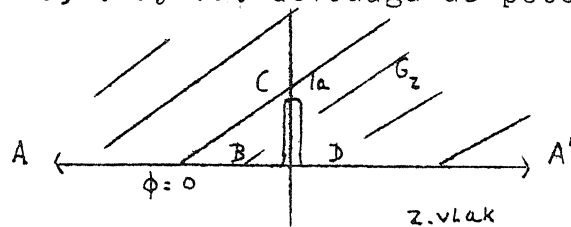
z-vlak



Omega-vlak als $\phi_0 > 0$.

De functie $\Omega = \Omega(z)$ geeft een conforme afbeelding van het gebied G_z op het gebied G_Ω , waarbij de rand met dezelfde omloopzin wordt afgebeeld (zodat $\psi \rightarrow -\infty$ voor $x \rightarrow \infty$!).

c. Zij G_z het bovenhalfvlak verminderd met een "uitsteeksel" langs $x=0$, $0 < y < a$. Gevraagd de potentiaal $\phi(x,y)$ die nul is op de rand



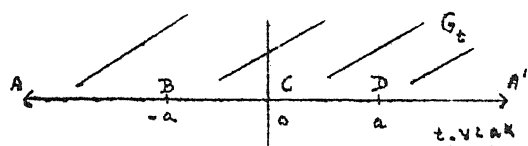
van G_z , terwijl in het oneindige het gedrag van ϕ bepaald is door de eis $\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} (\phi - Ay) = 0$.

Voor de functie $\Omega(z)$ volgt hieruit dat voor grote $|z|$ geldt $\Omega(z) = -iAz + iC + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$, waarin C een reële constante is, die we nul zullen kiezen (dát mag!). Het beeld G_Ω van G_z is dan het rechterhalfvlak.

Beschouw nu de functie $t = t(z) = \sqrt{z^2 + a^2}$, waarbij het teken van de wortel wordt bepaald door de eis dat t positief reëel is voor z positief reëel. Het blijkt dat hierdoor G_z conform wordt afgebeeld op het bovenhalfvlak G_t .

Voor grote $|z|$ geldt

$$t = z \sqrt{1 + \frac{a^2}{z^2}} = z + \frac{a^2}{2z} + \dots$$

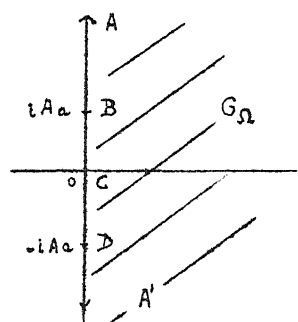


Beschouw nu de functie $\Omega = \Omega^*(t)$. Deze moet G_t conform afbeelden op G_Ω , terwijl in het oneindige

$$\begin{aligned} \Omega &= -iA \left(t - \frac{a^2}{2t^2} + \dots \right) + \frac{c_1}{t} + \dots \\ &= -iAt + \frac{d_s}{t} \end{aligned}$$

moet zijn.

De enige mogelijkheid hiervoor is



Ω -vlak

$\Omega^*(t) = -iAt$, waaruit volgt

$$\Omega(z) = -iA \sqrt{z^2 + a^2}.$$

Voor $z=+0$ volgt hieruit $\Omega = i\psi = -iAa$, en voor $z=-0$ $\Omega = i\psi = +iAa$. Het aantal stroomlijnen dat tussen B en D eindigt is dus $2Aa$ (verband met oppervlakte lading in het electrostatistische geval!). Bij $z=ia$ wordt

$\frac{d\Omega}{dz}$, de veldsterkte (stroomsterkte) wordt hier dus oneindig. Dit geldt algemeen bij inspringende hoeken.

2.2. Analytische voortzetting en spiegelingsprincipe.

In het volgende zal herhaaldelijk gebruik worden gemaakt van analytische voortzetting en van het spiegelingsprincipe. We herhalen daarom enige eigenschappen hiervan. Tevens zullen overeenkomstige resultaten voor harmonische functies worden afgeleid.

Definitie:

Zij $f_0(z)$ analytisch in een gebied G_0 en zij $f(x)$ analytisch in een gebied G dat G_0 bevat. Indien in G_0 $f(z)=f_0(z)$ is, dan heet $f(z)$ een analytische voortzetting van $f_0(z)$ in G .

Stelling 1 (Monodromie-stelling).

Indien in bovenstaande definitie G enkelvoudig samenhangend en $f_0(z)$ eenwaardig is, dan is de analytische voortzetting van $f_0(z)$ in G , indien mogelijk, eenduidig bepaald en eenwaardig.

Stelling 2.

Zij G_1 en G_2 gebieden die een gebied G_{12} gemeen hebben. Zij $f_j(z)$ analytisch in G_j ($j=1,2$) en zij in G_{12} $f_1(z)=f_2(z)$. Dan is de functie $f(z)$, die gedefinieerd is door $f(z)=f_1(z)$ in G_1 en $f(z)=f_2(z)$ in G_2 een analytische voortzetting van $f_1(z)$ in $G_1 \cup G_2$ (de vereniging van G_1 en G_2).

Opmerking. Men kan ook zeggen dat f_1 en f_2 analytische voortzettingen van elkaar zijn.

Deze stelling geeft de analytische voortzetting in overlappende gebieden. Voor vele toepassingen is de volgende stelling, die analytische voortzetting in aangrenzende gebieden geeft, belangrijker.

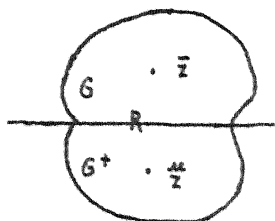
Stelling 3.

Zij G_1 en G_2 gebieden, waarvan de randen een rectificeerbare kromme K gemeen hebben. Zij $f_j(z)$ analytisch in G_j en continu in $G_j + K$ ($j=1,2$) en zij langs K $f_1(z)=f_2(z)$. Dan zijn f_1 en f_2 analytische voortzettingen van elkaar.

Met behulp van deze stelling bewijzen we nu eenvoudig het spiegelingsbeginsel van Schwarz:

Stelling 4.

Zij G een gebied dat geheel boven de reële as ligt en waarvan de rand een interval R van de reële as bevat. Zij $f(z)$ analytisch in G en continu in $G+R$ en zij langs R $f(z)$ reëel.



Dan kan $f(z)$ in het gebied G^* dat uit G door spiegeling aan de reële as ontstaat analytisch worden voortgezet en in $G+G^*+R$ geldt $f(z)=\overline{f(\bar{z})}$ (1)

Bewijs

Definieer in G^* $f_1(z)$ door $f_1(z) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{f(\bar{z})}$. (2)

Dat $f_1(z)$ analytisch is in G^* volgt door machtreeksontwikkeling (zie pag. CS 23) of als volgt: zij $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ en $f_1(z) = u_1(x,y) + iv_1(x,y)$. Dan volgt uit (2) (voor (x,y) in G^* , dus $(x,-y)$ in G)

$$u_1(x,y) = u(x,-y), \quad v_1(x,y) = -v(x,-y).$$

Nu blijkt eenvoudig dat u_1 en v_1 aan de differentiaalvergelijkingen van Cauchy en Riemann: $\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y}$, $\frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{\partial v_1}{\partial x}$ voldoen, zodat $f_1(z)$ analytisch is in R^* .

Verder is $f_1(z)$ continu in G^*+R en langs R geldt $f_1(z)=f(z)$ (want hier is $v=0$!). Hieruit volgt met stelling 3 dat f_1 en f analytische voortzettingen van elkaar zijn. Daar de analytische voortzetting van $f(z)$, indien mogelijk, eenduidig bepaald is, volgt hieruit tevens de geldigheid van (2) voor alle z in G^* . Ligt z nu in G , dan ligt $z_1=\bar{z}$ in G^* , zodat $f(z_1)=f(\bar{z}_1)$, of $f(z_1)=f(\bar{z}_1)$, en dus (daar $\bar{z}_1=z$) $f(z)=f(\bar{z})$. Dat (1) ook langs R geldt is evident.

Corollarium: Als langs R $f(z)$ niet reëel, doch zuiver imaginair is, dan kan men analytisch voortzetten met behulp van de formule

$$f(z) = -\overline{f(\bar{z})} \quad (3)$$

Uitbreiding: Zij G_z een gebied waarvan de rand een deel C_z van een "cirkel" (cirkel of rechte) bevat. Zij $f(z)$ analytisch in G_z en continu in $G+C_z$ en zij bij de afbeelding $w=f(z)$ het beeld van C_z deel C_w van een "cirkel" in het w -vlak. Dan kan $f(z)$ analytisch worden voortgezet in het gebied G^* dat door "spiegeling" van G_z aan C_z ontstaat en de beelden van punten uit $G+G$ die gespiegeld liggen t.o.v. C_z liggen gespiegeld t.o.v. C_w .

Voorbeeld.

Beschouw de formule $w=f(z)=\log z$. Dan geldt $\text{Re } w=\log|z|=0$ voor $|z|=1$. De cirkel $|z|=1$ wordt dan afgebeeld op de imaginaire as. Gespiegelde punten aan de cirkel zijn z en \bar{z}^{-1} , gespiegelde punten aan de imaginaire as w en $-\bar{w}$. Er moet dus gelden $f(\bar{z}^{-1}) = -\overline{f(z)}$. Dit is inderdaad het geval. Stel nl. $z=re^{i\vartheta}$, dan is $\bar{z}^{-1}=r^{-1}e^{i\vartheta}$, dus $f(\bar{z}^{-1})=-\log r+i\vartheta$. Anderzijds is $-\overline{f(z)}=-(\log r+i\vartheta)=-\log r+i\vartheta$, q.e.d.

Al deze zaken hebben hun analogen in de theorie der harmonische functies. Analytische voortzetting definieert men op precies dezelfde manier. Van belang is vooral de "vertaling" van de stellingen 3 en 4.

Stelling 3a.

Zij G_1 en G_2 gebieden die een continu differentieerbare kromme K gemeen hebben. Zij $\phi_j(x,y)$ harmonisch in G_j , met z'n eerste afgeleiden

continu in $G_j + K$ ($j=1,2$) en zij langs K $\phi_1 = \phi_2$, $\frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \phi_2}{\partial n}$ (beide normalen in dezelfde richting). Dan zijn ϕ_1 en ϕ_2 analytische voortzettingen van elkaar.

Opmerking. Dat we K continu differentieerbaar moeten veronderstellen komt omdat we van een normale afgeleide langs K willen spreken. De voorwaarde is niet geheel nodig, doch voor de praktijk natuurlijk ruimschoots voldoende.

Bewijs: Bepaal de bij ϕ_1 en ϕ_2 behorende geconjugeerde harmonische functies (stroomfuncties) ψ_1 en ψ_2 zodanig dat in een punt van K $\psi_1 = \psi_2 = 0$ (dat kan!). Dan geldt langs K overal $\psi_1 = \psi_2$, en dus, als in G_j $\Omega_j = \phi_j + i\psi_j$ ($j=1,2$) de complexe potentiaal is: Ω_j is continu in $G_j + K$ en langs K is $\Omega_1 = \Omega_2$. Uit stelling 3 volgt dan dat Ω_1 en Ω_2 elkaars analytische voortzettingen zijn en dit zelfde geldt dus ook voor ϕ_1 en ϕ_2 .

Stelling 4a.

Zij G een gebied dat geheel boven de x -as ligt en waarvan de rand een interval R met de x -as gemeen heeft. Zij $\phi(x,y)$ harmonisch in G , met z'n eerste afgeleiden continu in $G+R$ en zij langs R $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$. Dan kan $\phi(x,y)$ in het gebied G^* dat uit G door spiegeling aan de x -as ontstaat analytisch worden voortgezet en in $G+G^*+R$ geldt $\phi(x,y) = \phi(x,-y)$. (4) (even spiegeling). Voor de bijbehorende stroomfunctie geldt $\psi(x,y) = 2\psi_0 - \psi(x,-y)$, indien ψ_0 de waarde van ψ langs R is.

Bewijs: Stelt men in G^* $\phi_1(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \phi(x,-y)$, dan is ϕ_1 natuurlijk harmonisch in G^* , met z'n eerste afgeleiden continu in G^*+R en langs R geldt $\phi_1(x,0) = \phi(x,0)$, $\frac{\partial \phi_1}{\partial y}(x,0) = -\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,0) = 0 = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,0)$. De wet volgt dan uit stelling 3a.

Natuurlijk geldt (4) ook als (x,y) in G of R ligt. De spiegeling van de stroomfunctie volgt bv. uit het gedrag van de complexe potentiaal.

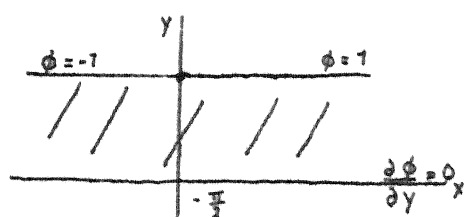
Corollarium: Als langs R $\phi = \phi_0 = \text{const}$ dan kan men spiegelen met behulp van

$$\phi(x,y) = 2\phi_0 - \phi(x,-y), \quad \psi(x,y) = \psi(x,-y) \quad (\text{oneven spiegeling}).$$

Uitbreiding. Op precies dezelfde manier kan men spiegelen aan andere rechten waarlangs òf $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ of $\phi = \text{const}$. Ook kan men spiegelen aan cirkels.

Voorbeeld.

Zij G het gebied $-\infty < x < \infty$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.



Gevraagd wordt een in G harmonische functie $\phi(x,y)$ die voldoet aan de randvoorwaarden

$$\text{langs } y = -\frac{\pi}{2}, \quad -\infty < x < \infty \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0,$$

$$\text{langs } y = 0, \quad -\infty < x < 0 \quad \phi = -1,$$

$$\text{langs } y = 0, \quad 0 < x < \infty \quad \phi = 1.$$

en begrensd is voor $x \rightarrow \pm \infty$.

We lossen dit vraagstuk hier op een elementaire wijze op. Door separatie van variabelen vindt men dat harmonische functies die aan de homogene randvoorwaarden voldoen zijn: $\sin(2n+1)y e^{-(2n+1)x}$, n geheel. Daar verder ϕ kennelijk oneven in y moet zijn kan men stellen

$$\phi(x, y) = \begin{cases} 1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(2n+1)y e^{-(2n+1)x} & \text{voor } x > 0 \\ -1 - \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(2n+1)y e^{(2n+1)x} & \text{voor } x < 0. \end{cases}$$

Aan alle randvoorwaarden is nu voldaan. De constanten c_n volgen uit de eis dat ϕ continu (en dus nul) moet zijn voor $x=0$. Hieruit volgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(2n+1)y = -1 \quad \text{voor } -\frac{\pi}{2} < y < 0,$$

en derhalve

$$c_n = -\frac{4}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin(2n+1)y \, dy = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

Men vindt dus:

$$\phi(x, y) = \begin{cases} 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)y e^{-(2n+1)x} & \text{voor } x > 0, \\ -1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)y e^{(2n+1)x} & \text{voor } x < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Voldoet de aldus bepaalde functie nu aan alle eisen? Voor $x \gg \varepsilon > 0$ en voor $x \ll -\varepsilon < 0$ convergeren de reeksen en al hun afgeleiden uniform, zodat hier de zaak in orde is: ϕ is harmonisch, met z'n afgeleiden continu tot op de rand en voldoet aan de randvoorwaarden. Maar voor $x=0$? De reeks voor $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ divergeert voor $x=0$.

We beschouwen daarom een hulpfunctie, waarbij we geen convergentiemoeilijkheden hebben, nl.

$$\Phi_1(x, y) = \begin{cases} x(\frac{\pi}{2} + y) + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cos(2n+1)y e^{-(2n+1)x} & \text{voor } x \geq 0, \\ -x(\frac{\pi}{2} + y) + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cos(2n+1)y e^{(2n+1)x} & \text{voor } x \leq 0. \end{cases}$$

Dit is kennelijk een functie die harmonisch is voor $x > 0$ en $x < 0$. Voor $x=0$ is Φ_1 en ook $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}$ continu - dit laatste volgt uit het feit dat voor $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq 0$

$$\frac{\pi}{2} + y = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)y.$$

Volgens stelling 3b is Φ_1 dus in de hele strook $G: -\infty < x < \infty, -\frac{\pi}{2} < y < 0$ harmonisch.

Voor $x > 0$ en $x < 0$ geldt $\phi(x, y) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$, terwijl voor $x=0$ $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0$ (want ϕ is een even functie van x).

Hieruit volgt: de functie $\phi(x, y)$ is die voor $x \geq 0$ door (5) gegeven wordt en nul is voor $x=0$ in de hele strook G harmonisch (want afgeleide van een harmonische functie) en dus oplossing van het gestelde probleem.

We zullen later dit probleem met behulp van conforme afbeelding op veel eenvoudiger wijze oplossen.

2.3. Conforme afbeelding door elementaire functies.

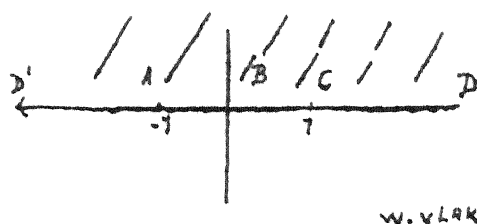
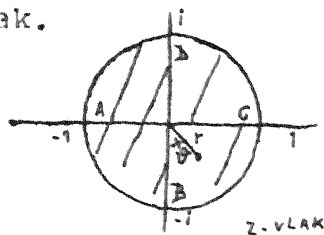
We beschouwen hier een aantal afbeeldingen door elementaire functies die in het volgende vaak gebruikt zullen worden.

A. De gebroken lineaire transformatie $w = \frac{az+b}{cz+d}$. Deze is reeds behandeld. Enkele eigenschappen zijn:

- "Cirkels" gaan over in "cirkels". De "cirkels" door $z=-d/c$ gaan over in rechten, alle rechten gaan over in "cirkels" door $w=a/c$.
- door drie corresponderende puntenparen is de transformatie eenduidig bepaald.
- als $C_z \rightarrow C_w$ en z_1 en z_2 gespiegeld liggen t.o.v. C_z dan liggen de corresponderende punten w_1 en w_2 gespiegeld t.o.v. C_w (dit is een speciaal geval van het spiegelsprincipe!).
- als $C_z \rightarrow C_w$ dan wordt het hele inwendige van C_z 1-1 afgebeeld op het hele inwendige van C_w indien de omloopzin langs C_z en C_w dezelfde is en op het hele buitengebied van C_w indien de omloopzin tegengesteld is. Analoog voor het buitengebied van C_z .

Enkele speciale gevallen:

- Afbeelding van het inwendige van de eenheidscirkel op het bovenhalfvlak.



Deze is natuurlijk op vele wijzen mogelijk. Bij de getekende correspondenties (op grond van de symmetrie komt A in -1 als B, C en D in resp. 0, 1 en ∞ komen) behoort

$$w = -i \frac{z+1}{z-1}. \quad (1)$$

(want de punten $z=-1$, $+1$ en 1 gaan naar 0 , ∞ , resp. 1).

We verifiëren nog dat het binnengebied van C_z op het bovenhalfvlak wordt afgebeeld:

Zij $z = -ie^{i\theta}$. Dan is

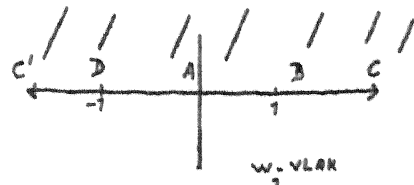
$$w = -i \frac{r e^{i\vartheta} - 1}{r e^{i\vartheta} + 1} = -i \frac{(r e^{i\vartheta} - 1)(r e^{-i\vartheta} + 1)}{(r e^{i\vartheta} + 1)(r e^{-i\vartheta} + 1)} = \frac{2r \sin \vartheta + i(1 - r^2)}{1 + r^2 + 2r \cos \vartheta}.$$

Daar $1 + r^2 + 2r \cos \vartheta > 0$ is, tenzij $\vartheta = \pi$, $r = 1$, is steeds $\text{Im } w > 0$ voor $r < 1$ (en $\text{Im } w < 0$ voor $r > 1$).

Voor $r = 1$ geldt $w = \frac{\sin \vartheta}{1 + \cos \vartheta} = \text{tg } \frac{1}{2} \vartheta$.

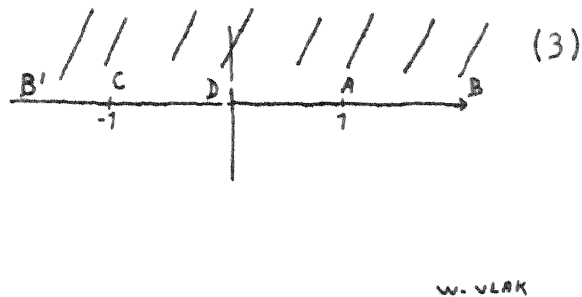
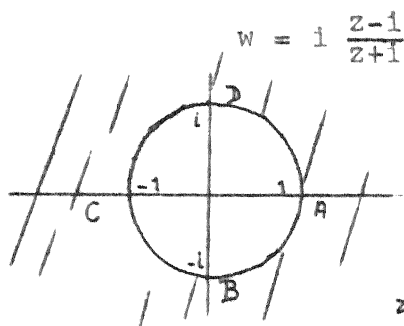
Een andere mogelijkheid is

$$w_1 = -i \frac{z+1}{z-1}.$$



b. Afbeelding van het uitwendige van de eenheidscirkel op het bovenhalfvlak.

Een mogelijkheid is

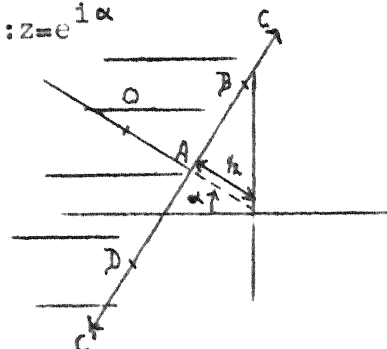
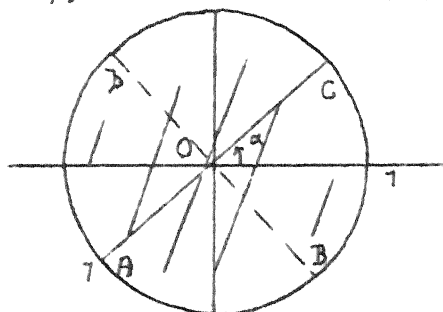


c. Afbeelding van het bovenhalfvlak op zichzelf. Als $z = a, b, c$ ($a < b < c$) gaan naar $w = 0, 1, \infty$, dan is de transformatie

$$w = \frac{z-a}{z-c} \cdot \frac{b-a}{b-c} \quad (4)$$

d. Inversie t.o.v. een punt van de eenheidscirkel. Beschouw de transformatie $w = \frac{1}{z - e^{i\alpha}}$ (5)

($-\pi < \alpha \leq \pi$), d.i. inversie t.o.v. het punt $C: z = e^{i\alpha}$



Daar $C \rightarrow \infty$, moet de eenheidscirkel overgaan in een rechte lijn. Het punt $A(z = -e^{i\alpha})$ gaat naar $w = -\frac{1}{2} e^{-i\alpha}$. De rechte AC blijft recht (als rechte door het inversie punt) en staat in A loodrecht op de "cirkel". Daar $w = 0$ het beeld van $z = \infty$ is, wordt het inwendige van de eenheidscirkel afgebeeld op dat halfvlak waar 0 niet in ligt.

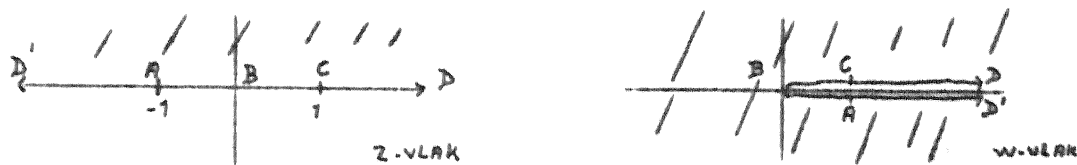
Opmerking: Er geldt

$$w + \frac{1}{2} e^{-i\alpha} = \frac{1}{2} e^{i(\frac{\pi}{2} - \alpha)} \cdot \left[-i \frac{ze^{-i\alpha} + 1}{ze^{i\alpha} + 1} \right]$$

Vergelijk dit met (2).

B. $w=z^2$.

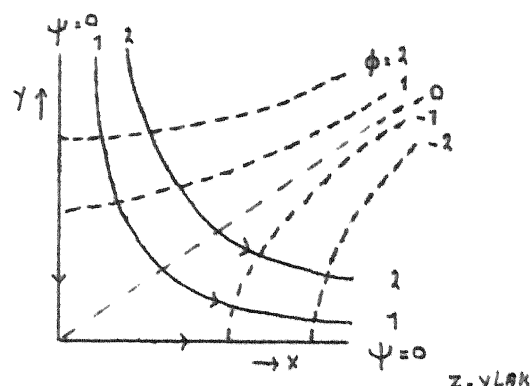
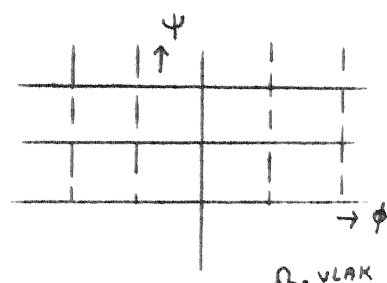
Deze transformatie beeldt het kwartvlak $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ af op het bovenhalfvlak ($0 < \arg w < \pi$) en het bovenhalfvlak $0 < \arg z < \pi$ op het volle vlak met een coupure langs de positief reële as ($0 < \arg w < 2\pi$)



De inverse transformatie $w=z^{\frac{1}{2}}$ doet (mits een passende keuze van de wortel wordt gedaan b.v. door de eis dat w positief is voor z positief) het omgekeerde.

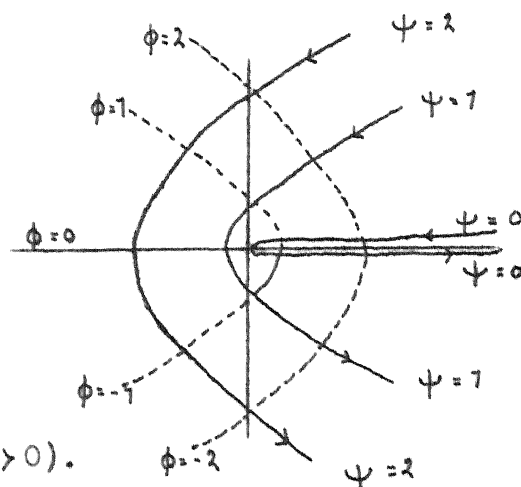
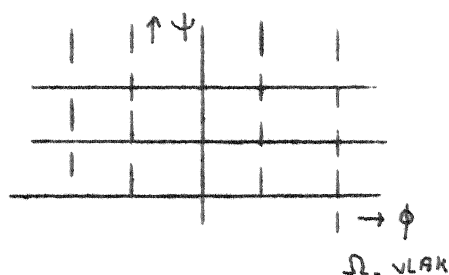
Voorbeelden

a. $\Omega(z) = z^2$, $G_z =$ kartvlak $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$, $G =$ bovenhalfvlak.



De aequipotentiaallijnen $\phi = \phi_0 = \text{const.}$ zijn orthogonale hyperbolen: $x^2 - y^2 = \phi_0$. De stroomlijnen $\psi = \psi_0 = \text{const.}$ zijn ook orthogonale hyperbolen: $2xy = \psi_0$, die loodrecht op de vorige staan. Ook de randen zijn stroomlijnen ($\psi = 0$). In het punt $z=0$ is $\frac{d\Omega}{dz} = 0$, de snelheid is hier dus nul en de afbeelding is niet meer conform. Men spreekt van een stuwpunt.

b. $\Omega(z) = \sqrt{z}$: $G_z =$ volle vlak met snede langs de positieve x-as, $G_\Omega =$ bovenhalfvlak.



De lijnen $\phi = \phi_0$ zijn parabolen: uit $x+iy = \phi^2 + 2i\phi\psi - \psi^2$ volgt voor $\phi = \phi_0$ $x^2 = \phi_0^2 - \frac{y^2}{4\phi_0^2}$, $\text{sgn } y = \text{sgn } \phi_0$ (want $\psi > 0$).

De stroomlijnen zijn ook parabolen: $x = \frac{y^2}{4\psi_0^2} - \psi_0^2$.

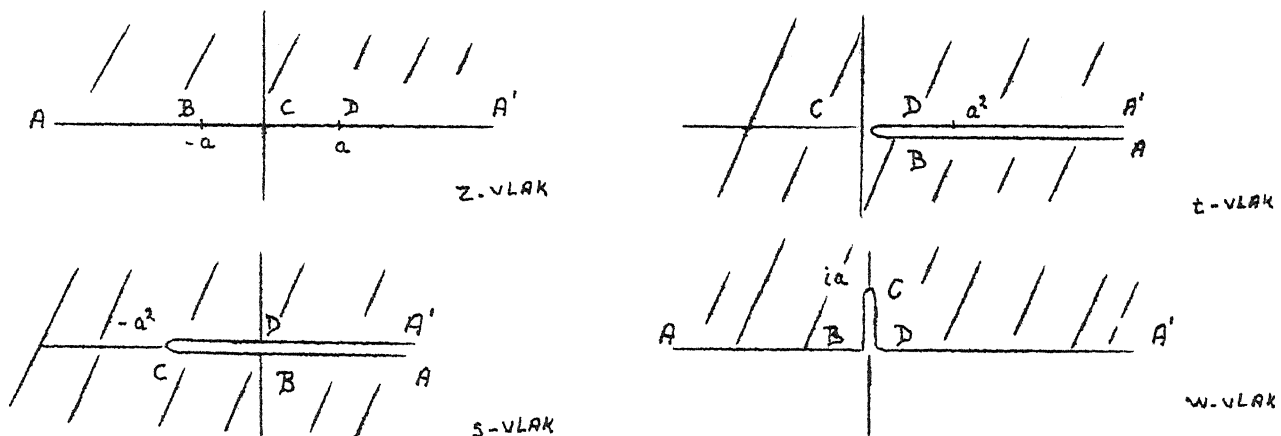
De snede langs de positieve x-as is de (dubbelgevouwen) stroomlijn $\psi=0$. In $z=0$ is $\frac{d\Omega}{dz}$ oneindig, de snelheden worden hier dus oneindig groot. De afbeelding is hier niet conform.

c. $\Omega(z) = -i z^2$, $\Omega(z) = -i\sqrt{z}$. Vergeleken bij de vorige gevallen zijn nu de rollen van equipotentiaallijnen en stroomlijnen verwisseld.

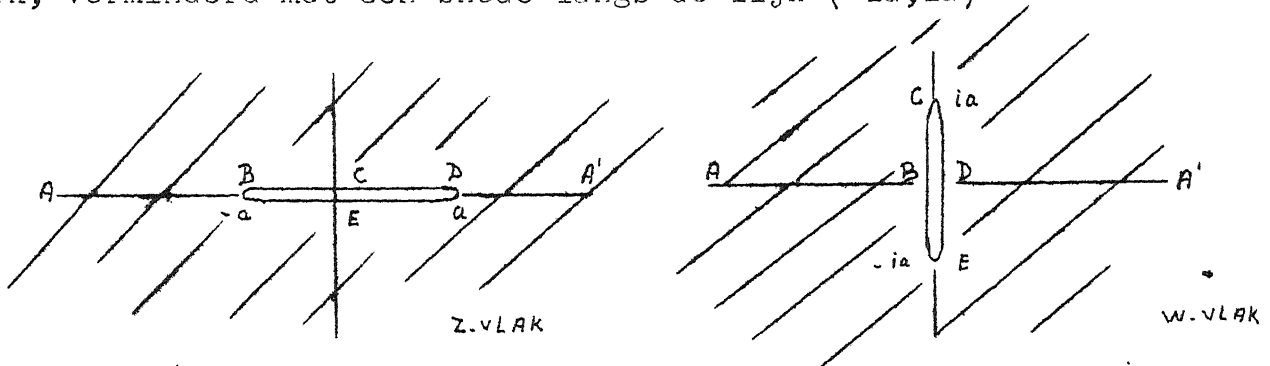
d. $w = \sqrt{z^2 - a^2}$, $a > 0$, $G_z =$ bovenhalfvlak, wortel positief voor z positief $> a$. Deze afbeelding kan men samenstellen uit de afbeeldingen

$$\begin{aligned} t &= z^2, \\ s &= t^2 - a^2, \\ w &= \sqrt{s} \quad (w > 0 \text{ voor } s > 0), \end{aligned}$$

zie figuren.

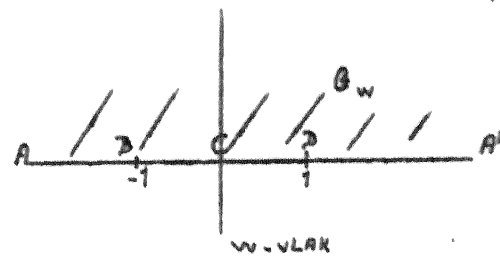
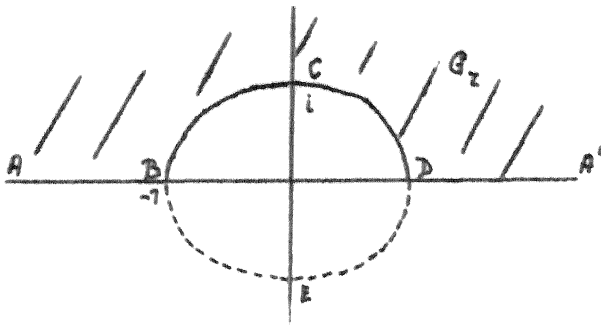


Natuurlijk kan men hier ook spiegelen aan de rechte DAB, die op een rechte wordt afgebeeld. Men krijgt dan een afbeelding van het volle vlak, verminderd met een snede langs de lijn $(-a, a)$ op het volle vlak, verminderd met een snede langs de lijn $(-ia, ia)$



c. $w = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$

We zoeken de transformatie die het bovenhalfvlak, verminderd met de halve eenheidscirkel, afbeeldt op het bovenhalfvlak (zie figuren)



De transformatie $t = i \frac{z+1}{z-1}$ beeldt het uitwendige van de eenheids-cirkel af op het bovenhalfvlak en het gebied G_z op het eerste kwadrant (want voor z reëel > 1 of < -1 is t positief imaginair).

Neem nu $s=t^2$ en

$$w = \frac{s-1}{s+1} \text{ (zie figuren).}$$

Dit is de gevraagde transformatie:

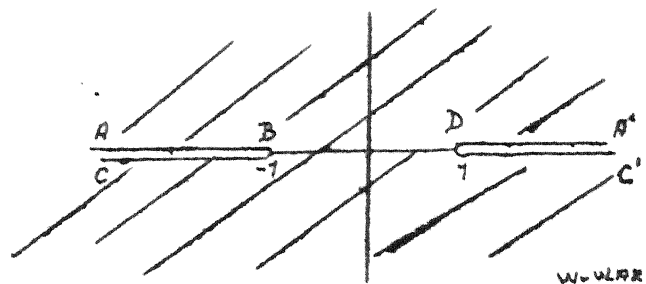
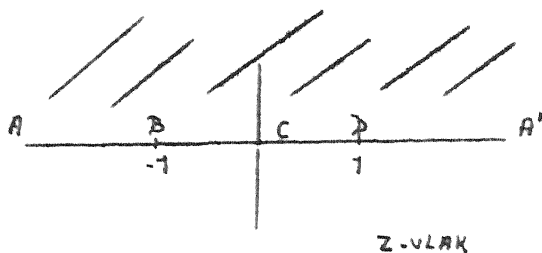
$$w = \frac{-1 - \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2}{1 - \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2} = \frac{1}{2} (z+z^{-1}). \quad (6)$$

de inverse van deze transformatie is

$$z = w + \sqrt{w^2 - 1} = \frac{\sqrt{w+1} + \sqrt{w-1}}{\sqrt{w+1} - \sqrt{w-1}} \quad (7)$$

(wortels positief voor w reëel > 1).

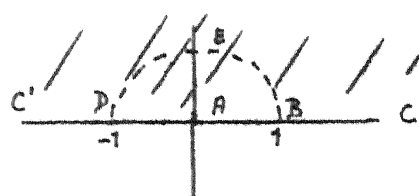
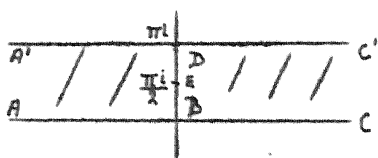
De cirkelboog BCD van het z -vlak wordt afgebeeld op een rechte lijn. Spiegelt men G_z en G_w aan deze "cirkels", dan ontstaat een afbeelding van het bovenhalfvlak op het volle w -vlak, verminderd met coupures langs de reële as van $-\infty$ naar -1 en van $-\infty$ naar $+1$ (zie figuren).



Men kan natuurlijk ook spiegelen aan de rechte DAB. Dan ontstaat een afbeelding van het uitwendige van de eenheidscirkel op het volle w -vlak, verminderd met een coupure langs de reële as van -1 tot $+1$.

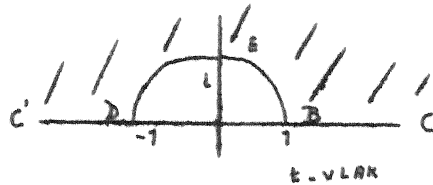
D. $w=e^z$; $z = \log w$.

Daar $|w|=e^x$, $\arg w=y$, wordt hierdoor de strook $0 < \text{Im } z < \pi$ afgebeeld op het bovenhalfvlak.



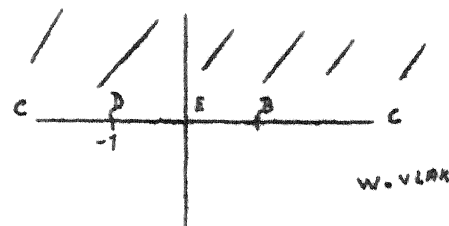
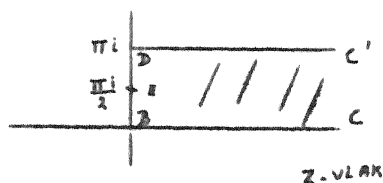
Voor $x=0$ geldt $|w|=1$, het stuk BED van de imaginaire as wordt dus afgebeeld op de halve eenheidscirkel. Anders gezegd: de halve strook $\operatorname{Re} z > 0$, $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ wordt door $t=e^z$ afgebeeld op het bovenhalfvlak, verminderd met de halve eenheidscirkel. Dit gebied wordt echter volgens

(6) door $w=\frac{1}{2}(t+t^{-1})$ afgebeeld op het volle bovenhalfvlak. We vinden dus de volgende transformatie



E. $w = \cosh z$,

beeldt de halve strook $\operatorname{Re} z > 0$, $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ af op het bovenhalfvlak



De inverse van deze transformatie is

$$z = \log(w + \sqrt{w^2 - 1}) \quad (\text{wortel positief voor } w \text{ reëel } > 1, \text{ logaritmische hier reëel}).$$

Daar $\sinh z = -i \cosh(z + \frac{\pi i}{2})$,

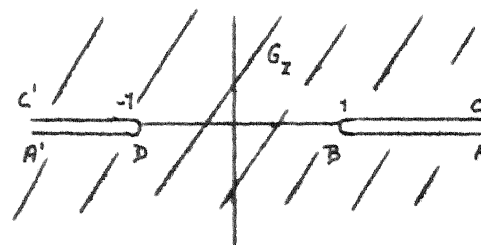
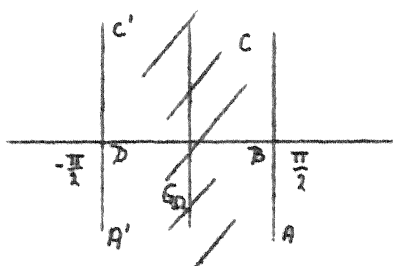
$$\cos z = \cosh iz,$$

$$\sin z = -i \sinh iz,$$

kunnen de door deze functies gegeven afbeeldingen ook eenvoudig gevonden worden.

Natuurlijk kan men weer op allerlei wijzen spiegelen. Spiegelt men b.v. in de figuren behorende bij $w=\cosh z$ en de lijn DAB, dan krijgt men een afbeelding van de strook $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ op het volle w -vlak, verminderd met coupures langs de reële as van $z = -\infty$ tot -1 en van $z=1$ tot ∞ .

Toepassing. De functie $z = \sin \Omega$ beeldt de getekende gebieden G_Ω en G_z op elkaar af



De inverse functie hiervan: $\Omega = \arcsin z$ geeft het potentiaalveld van twee half-oneindige platen langs ABC en C'DA' met potentialen $+\frac{\pi}{2}$, resp. $-\frac{\pi}{2}$.

Daar $\sin(\phi + i\psi) = \sin \phi \cosh \psi + i \cos \phi \sinh \psi$, worden de equipotentiaal-lijnen $\phi = \phi_0$ gegeven door de halve hyperbolen

$$\frac{x^2}{\sin^2 \phi_0} - \frac{y^2}{\cos^2 \phi_0} = 1, \quad \text{sgn } x = \text{sgn } \phi_0$$

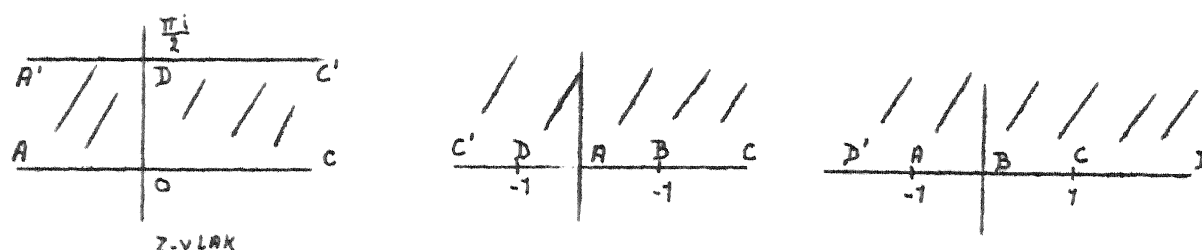
en de stroomlijnen $\psi = \psi_0$ door de halve ellipsen

$$\frac{x^2}{\cosh^2 \psi_0} + \frac{y^2}{\sinh^2 \psi_0} = 1, \quad \text{sgn } y = \text{sgn } \psi_0$$

E. $w = \tanh z$.

$$\text{Daar } \tanh z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1},$$

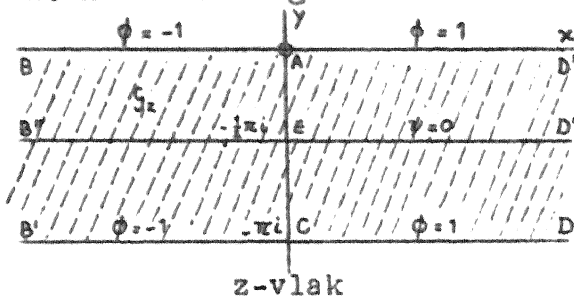
volgt deze afbeelding direct door samenstelling van de afbeeldingen $t = e^{2z}$ en $w = \frac{t-1}{t+1}$. Het blijkt dat de strook $0 < \text{Im } z < \frac{\pi}{2}$ afgebeeld wordt op het bovenhalfvlak



De inverse van deze transformatie is $z = \frac{1}{2} \log \frac{1+w}{1-w}$ (logarithme reël voor w reël tussen -1 en $+1$).

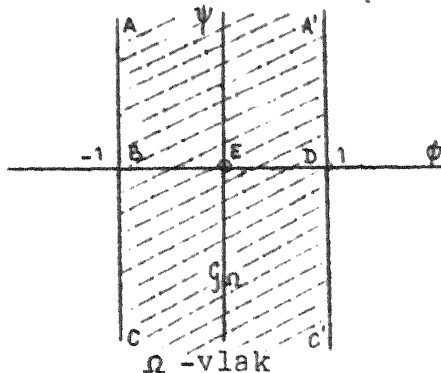
2.4. Enkele toepassingen.

A. Beschouw nog eens het voorbeeld uit 2.2.



Daar langs de lijn $y = -\frac{\pi}{2}$ geeist werd $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$, kunnen we de potenti-aal aan deze lijn even spiegelen, zodat de nevenstaande situatie ontstaat. Langs de stroomlijn $B''ED''$ zullen we $\psi = 0$ kiezen.

Het gebied G_Ω uit het $\Omega = \phi + i\psi$ vlak dat met G_z correspondeert is de strook $-1 < \text{Re } \Omega < 1$. In de punten A en C moet de stroomfunctie oneindig



worden omdat daar de aequipotenti-aallijnen $\phi = -1$ en $\phi = +1$ samenkomen. We zoeken nu de functie $\Omega = \Omega(z)$ die G_z afbeeldt op G_Ω .

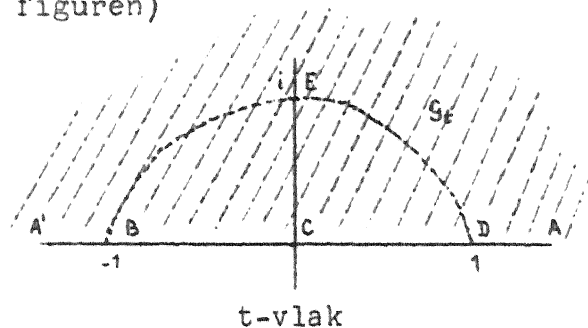
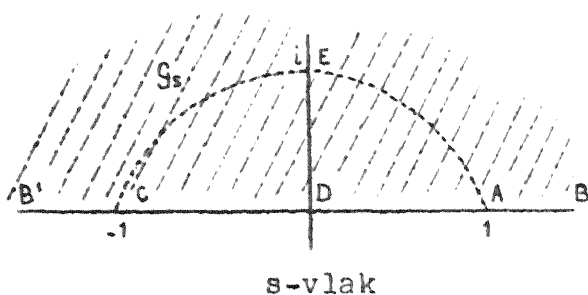
Beschouw de afbeeldingen

$$s = e^{-z} \quad (1)$$

$$\text{en } t = 1 e^{-\frac{1}{2} \pi i \Omega} \quad (2)$$

Deze beelden G_z , resp. G_Ω af op

boven halfvlakken G_s , resp. G_t (zie figuren)



Beschouw nu de functie $t = t[\Omega\{z(s)\}]$. Deze moet een conforme afbeel-ding geven van G_s op G_t . Waaruit volgt ¹⁾ dat t een gebroken lineaire functie van s moet zijn, en wel, in verband met de gegeven correspon-denties

$$t = \frac{1+s}{1-s} \quad (3)$$

Uit (1), (2) en (3) volgt nu het verband tussen Ω en z . Uit (2) volgt $t = e^{-\frac{1}{2} \pi i (\Omega - 1)}$ en dus

$$\Omega = 1 + \frac{2i}{\pi} \log t,$$

1) Op pag. CS 15, stelling 4.3 is bewezen dat iedere conforme afbeel-ding van de eenheidscirkel op zichzelf tot stand gebracht wordt door een gebroken lineaire functie. Daar het bovenhalfvlak door een gebroken lineaire functie op de eenheidscirkel wordt afgebeeld en omgekeerd, geldt ook dat iedere conforme afbeelding van het bovenhalfvlak op zichzelf tot stand gebracht wordt door een ge-broken lineaire functie.

waarbij we de hoofdwaarde van de logaritmie moeten nemen ($\log t \rightarrow 0$ voor $t \rightarrow 1$), daar voor $t \rightarrow 1$, $\Omega \rightarrow 1$ (het punt D). Met (3) en (1) volgt dan

$$\Omega(z) = 1 + \frac{2i}{\pi} \log \frac{1+e^{-z}}{1-e^{-z}}. \quad (4a)$$

Een iets andere formule, die geheel gelijkwaardig is met (4a) verkrijgt men als volgt. In G_t geldt $\log t = \log(-t) + \pi i$, indien van de tweede logaritmie weer de hoofdwaarde wordt genomen ($\log(-t) \rightarrow 0$ voor $t \rightarrow -1$). En dus

$$\Omega(z) = -1 + \frac{2i}{\pi} \log \frac{1+e^{-z}}{e^{-z}-1} = -1 + \frac{2i}{\pi} \log \frac{1+e^z}{1-e^z}. \quad (4b)$$

Uit (4) kunnen (desgewenst) reeksontwikkelingen worden afgeleid. Er geldt nl.

$$\log \frac{1+w}{1-w} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} w^{2n+1},$$

mits 1°. $|w| \leq 1$, $w \neq 1$ of -1 ;

2°. van de logaritmie de hoofdwaarde wordt genomen.

Hiermee volgt uit (4)

$$\Omega(z) = \begin{cases} 1 + \frac{4i}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{-(2n+1)z} & \text{voor } \operatorname{Re} z \geq 0, z \neq 0 \text{ of } -\pi i \\ -1 + \frac{4i}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{(2n+1)z} & \text{voor } \operatorname{Re} z \leq 0, z \neq 0 \text{ of } -\pi i \end{cases} \quad (5)$$

Neemt men hiervan het reële deel, dan vindt men voor $\phi(x,y)$ de formules uit 2.2 terug. Voor $\psi(x,y)$ volgt uit (5)

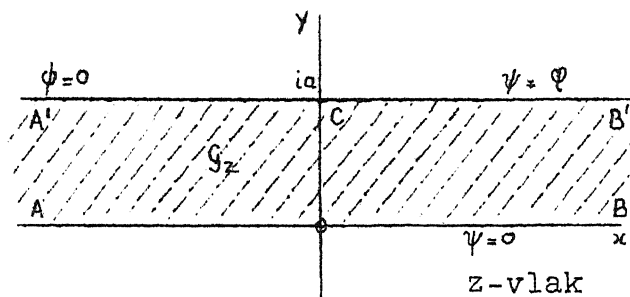
$$\psi(x,y) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{-(2n+1)|x|} \cos(2n+1)y \quad (6)$$

Voor $z=iy$ volgt uit (3) $t=-i \operatorname{ctn} \frac{1}{2}y$ en dus $\Omega = \frac{2i}{\pi} \log \operatorname{ctn}(\frac{1}{2}|y|)$. Hieruit volgt met (6) de reeksontwikkeling

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cos(2n+1)y = \frac{1}{2} \log \operatorname{ctn}(\frac{1}{2}|y|),$$

geldig voor $-\pi < y < \pi$, $y \neq 0$.

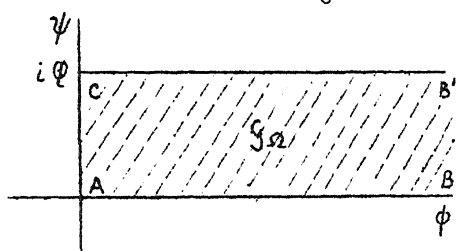
Opmerking. Daar $e^{-\pi} = 0.0432$ en $e^{-2\pi} = 0.00187$ volgt uit (5) dat $\Omega(z)$ practisch gelijk is aan 1 voor $x > 2\pi$ en gelijk aan -1 voor $x < -2\pi$. Het gebied waar de stroming werkelijk van betekenis is heeft dus een lengte van slechts enkele malen de breedte van de strook.



Zij G_z de strook $0 < \text{Im } z < a$, zij langs $\text{Im } z=0$ $\psi=0$, langs $\text{Im } z=a$, $\text{Re } z < 0$ $\phi=0$, en langs $\text{Im } z=a$, $\text{Re } z > 0$ $\psi=Q > 0$ (de bedoeling is dat het snelheidsveld voor $x \gg a$ uniform is met snelheid $q_x = -Q/a$;

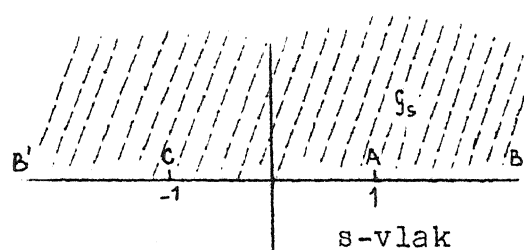
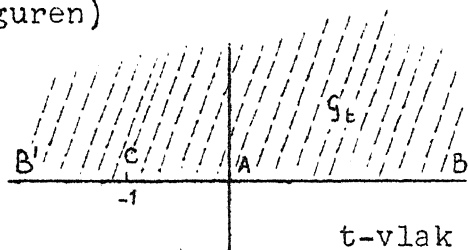
voor de potentiaal zal dus voor $x \gg a$ moeten gelden $\phi = Q \cdot \frac{x}{a} + \text{const} + \dots$).

Men kan zich hierbij verschillende fysische situaties voorstellen.



Het gebied G_Ω ziet er uit als getekend. We moeten weer de functie $\Omega = \Omega(z)$ vinden die G_z op G_Ω afbeeldt. Beschouw hiertoe de afbeeldingen $t = e^{\pi z/a}$, $s = \cosh(\pi \Omega / Q)$,

die G_z , resp. G_Ω afbeelden op bovenhalfvlakken G_t , resp. G_s (zie figuren)



Daar $s=s(t)$ G_t moet afbeelden op G_s , volgt onmiddellijk $s=1+2t$ en dus

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= (Q/\pi) \cosh^{-1} (1+2e^{\pi z/a}) = \\ &= (Q/\pi) \log (1+2e^{\pi z/a} + \sqrt{4e^{2\pi z/a} + 4e^{\pi z/a}}). \end{aligned}$$

(wortel positief en logaritmische reëel voor z reëel).

Voor $\text{Re } z \gg a$ geldt

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \frac{Q}{\pi} \left[\frac{\pi z}{a} + \log 4 + \log \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + e^{-\pi z/a}} + \frac{1}{4} e^{-\pi z/a} \right) \right] \\ &= \frac{Qz}{a} + \frac{Q}{\pi} (\log 4 + \frac{1}{2} e^{-\pi z/a} + \dots), \end{aligned}$$

waaruit volgt dat voor $x > 2a$ de stroming vrijwel zuiver uniform is.

De reële constante $\frac{1}{\pi} \log 4$ kan men de uitstromings-weerstand noemen.

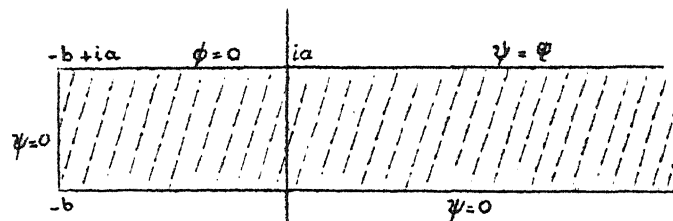
Voor $-\text{Re } z \gg a$ geldt

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \frac{Q}{\pi} \log (1+2e^{\pi z/2a} \sqrt{1+e^{\pi z/a}} + 2e^{\pi z/a}) = \\ &= \frac{2Q}{\pi} e^{\pi z/2a} (1 + \dots), \end{aligned}$$

zodat voor $x < -4a$ potentiaal en stroomfunctie vrijwel nul zijn. De uitstroming vindt dus vrijwel geheel plaats tussen $x=-4a$ en $x=0$.

Opmerkingen

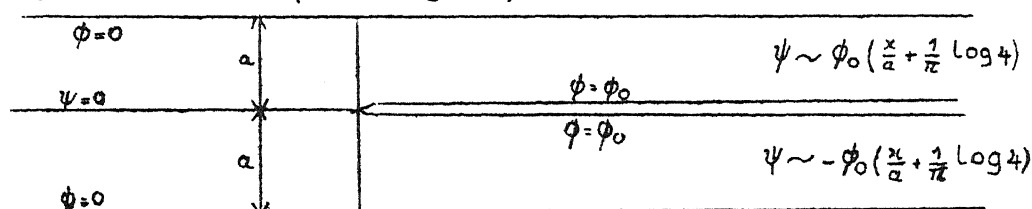
1. Is het gebied, waar de instroming plaats vindt, begrensd, zoals in de figuur is aangegeven, dan vindt men op vrijwel dezelfde wijze



$$\Omega(z) = \frac{Q}{\pi} \cosh^{-1} \left\{ \frac{2 \cosh \pi (z+b)/a + \cosh(\pi b/a) + 1}{2 \cosh(\pi b/a) - 1} \right\}$$

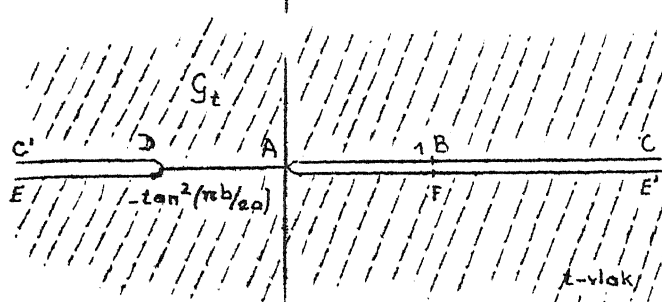
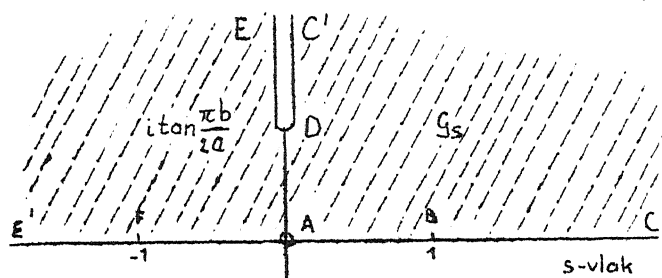
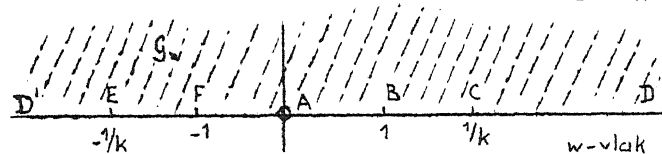
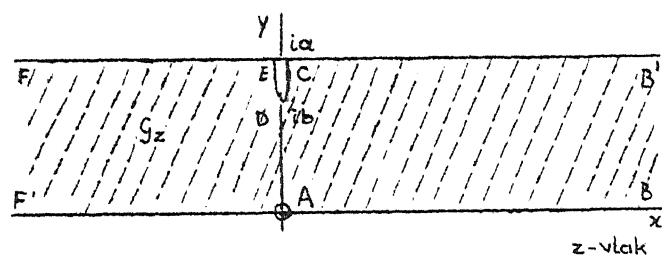
De uitstromingsweerstand wordt dan $\frac{1}{\pi} \left\{ \log 4 - 2 \log (1 - e^{-\pi b/za}) \right\}$

2. Verwisselt men in het bovenstaande de rollen van ϕ en ψ ($\psi \rightarrow \phi$, $\phi \rightarrow -\psi$, $Q \rightarrow \phi_0$) en spiegelt men aan de lijn $y=a$ dan kan men de situatie electrostatisch interpreteren: ϕ is de potentiaal van een half-oneindige plaat met potentiaal ϕ_0 midden tussen twee oneindige platen met potentiaal 0 (zie figuur)



Daar de stroomfunctie nu het "aantal" krachtlijnen en dus de oppervlakte-lading op de platen meet, is wat hierboven de intree-weerstand werd genoemd, nu een maat voor de extra-lading die door het rand-effect bij het uiteinde van de middelste plaat wordt geïnduceerd.

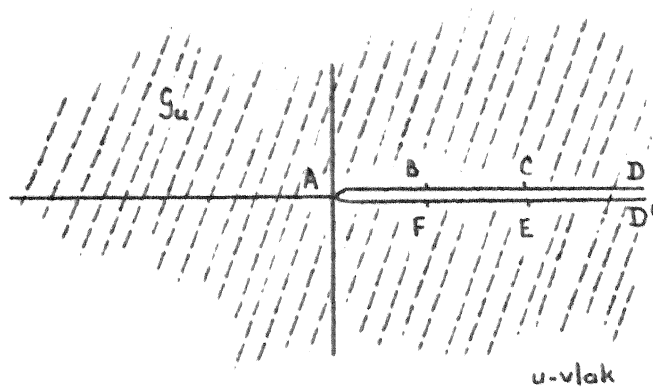
C. Zij G_z de strook $0 < \text{Im } z < a$, verminderd met een "uitsteeksel" langs $\text{Re } z=0$, $b < \text{Im } z < a$ ($0 < b \leq a$). Gevraagd wordt de afbeelding van G_z op



het bovenhalfvlak G_w , waarbij de punten A, B en D komen in resp. $w=0$, 1 en ∞ . Op grond van de symmetrie komt dan F in $w=-1$. Waar C en E komen, kan a priori niet worden gezegd, slechts is bekend dat $1 < 1/k < \infty$.

Daar $s = \tanh \frac{\pi z}{2a}$ wordt G_z afgebeeld op het bovenhalfvlak, verminderd met een coupure langs de imaginaire as van $i \tan(\pi b/2a)$ naar $i\infty$.

Door $t = s^2$ gaat G_s over in het volle t -vlak verminderd met twee coupures langs de reële as: van $-\infty$ tot $-\tan^2(\pi b/2a)$ en van 0 tot ∞ .



Door de gebroken lineaire transformatie $u = \frac{t(1+\tan^2(\pi b/2a))}{t+\tan^2(\pi b/2a)}$

$$= \frac{t}{t \cos^2(\pi b/2a) + \sin^2(\pi b/2a)}$$

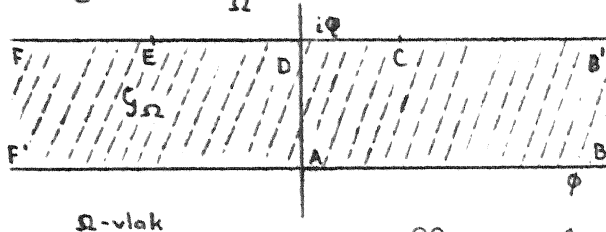
worden de beide coupures tot één enkele langs $(0, \infty)$ samengetrokken. De punten C en E komen in

$$\frac{1}{\cos(\pi b/2a)} \pm 10.$$

Door $w = \sqrt{u}$ (w positief voor u positief) ontstaat tenslotte de gevraagde afbeelding op het w -vlak. Hierbij blijkt $k = \cos(\pi b/2a)$. Door samenstelling van de verschillende stappen vindt men

$$w = \frac{\sinh(\pi z/2a)}{\sqrt{\cosh^2(\pi z/2a) - k^2}}.$$

Zij nu $\Omega(z)$ de complexe potentiaal van een stroming in G_z die zich voor $z \rightarrow \pm \infty$ gedraagt als een uniforme stroming met debiet Q . Het gebied G_Ω is dan de strook $0 < \text{Im } \Omega < Q$.



Door $w = \tanh(\pi \Omega/2Q)$ wordt dit afgebeeld op G_w met de gewenste correspondenties. En dus geldt

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \frac{2Q}{\pi} \tanh^{-1} \frac{\sinh(\pi z/2a)}{\sqrt{\cosh^2(\pi z/2a) - k^2}} = \\ &= \frac{Q}{\pi} \log \frac{\sqrt{\cosh^2(\pi z/2a) - k^2} + \sinh(\pi z/2a)}{\sqrt{\cosh^2(\pi z/2a) - k^2} - \sinh(\pi z/2a)}. \end{aligned}$$

We zoeken nog het gedrag van Ω voor $\text{Re } z \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \frac{2Q}{\pi} \log \frac{\sinh(\pi z/2a) + \cosh(\pi z/2a) \sqrt{1-k^2} \{\cosh(\pi z/2a)\}^{-2\gamma}}{\sqrt{1-k^2}^{2\gamma}} = \\ &= \frac{Qz}{a} - \frac{Q}{\pi} \left[\log(1-k^2) - 2k^2 e^{-\pi z/a} + \dots \right]. \end{aligned}$$

De totale "weerstand" van het uitsteeksel is dus $-\frac{2}{\pi} \log(1-k^2) = -\frac{4}{\pi} \log \sin \frac{\pi b}{2a}$. Verder ziet men weer dat de stroming vrijwel uniform is voor $|x| > 2a$.

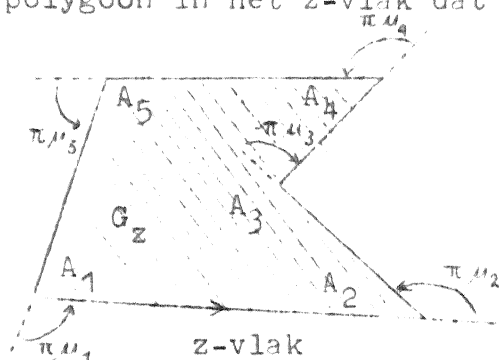
Opmerking. In alle voorbeelden is gebleken dat de afwijkingen van de uniforme snelheidsverdeling slechts op korte afstand van de "storing" merkbaar zijn. Dit geldt algemeen in dergelijke situaties. In de elasticiteitstheorie heeft men bij rek, buiging en torsie van staven hetzelfde: principe van de Saint-Venant.

2.5. De afbeelding van polygoon-gebieden op een halfvlak volgens Schwarz en Christoffel.

De tot nu toe behandelde afbeeldingen zijn alle verkregen of door beschouwing van een van te voren gekozen elementaire functie of door - min of meer proberenderwijs - een aantal elementaire afbeeldingen samen te stellen. Voor een bepaalde (voor de toepassingen zeer belangrijke!) klasse van gebieden - nl. de gebieden die begrensd worden door een polygoon - is door Schwarz en Christoffel een algemene methode aangegeven.

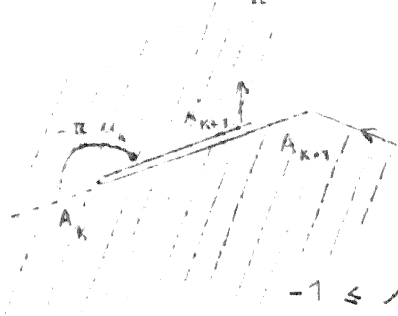
Algemene beschouwingen.

A. Zij A_1, A_2, \dots, A_n een enkelvoudig (dus zonder overkruisingen) gesloten polygoon in het z -vlak dat een gebied G_z omsluit.



De complexe getallen die met A_1, A_2, \dots corresponderen noemen we z_1, z_2, \dots . We veronderstellen dat A_1, A_2, \dots in de bij G_z behorende normale volgorde liggen ("linksom"). De hoek waarover de (georiënteerde) "randvector" aan het polygoon in

een hoekpunt A_k draait zullen we $\pi \mu_k$ noemen (linksom positief). Bij een uitspringende hoek is dan $0 < \mu_k < 1$, bij een inspringende hoek is $-1 \leq \mu_k < 0$. $\mu_k = -1$ correspondeert met het uiteinde van een coupure (zie figuur). $\mu_k = 1$ wordt uitgesloten, daar in dit geval het gebied



G_z geen punten in de omgeving van A_k kan hebben, zodat A_k geen randpunt aan G_z zou zijn. Ook $\mu_k = 0$ komt niet voor. Er geldt dus (althans bij een hoekpunt in het eindige)

$$-1 \leq \mu_k < 1, \quad \mu_k \neq 0 \quad (1)$$

De hoek $A_{k-1} A_k A_{k+1}$ is $\pi(1 - \mu_k)$.

Daar het polygoon enkelvoudig samenhangend verondersteld is, moet

$$\sum_{k=1}^n \mu_k = 2 \quad (2)$$

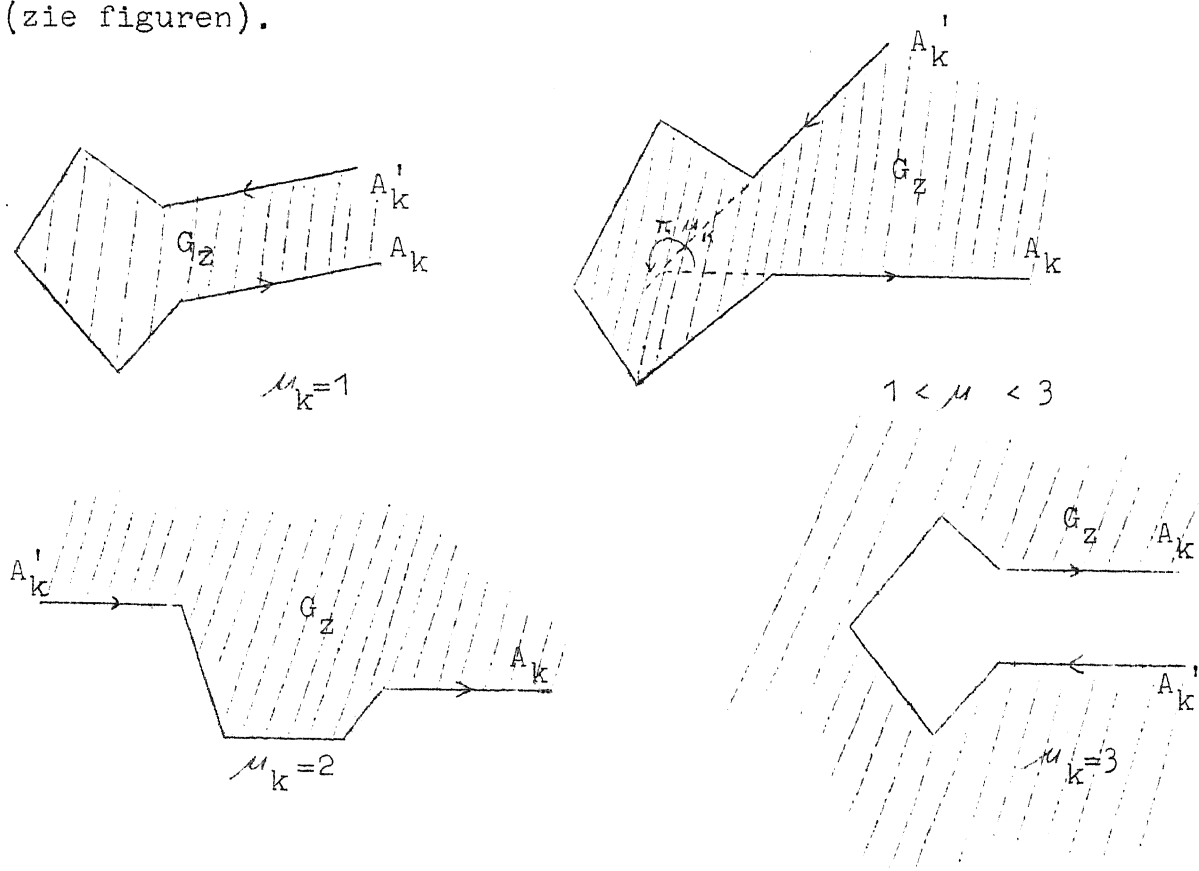
(de raakvector maakt één volle omwenteling als het polygoon eenmaal doorlopen wordt).

We breiden het bovenstaande uit door ook hoekpunten in het oneindige toe te laten. De hoek $\pi \mu_k$ wordt hier op dezelfde wijze gedefinieerd: als de hoek waarover de "raak vector" aan het polygoon draait bij passage van A_k . In plaats van (1) geldt nu

$$1 \leq \mu_k \leq 3$$

(1a)

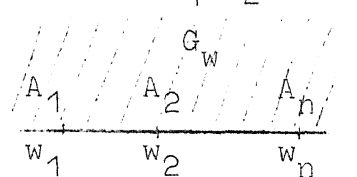
(zie figuren).



De relatie (2) blijft echter gelden.

Zij nu $z=f(w)$ een functie die het bovenhalfvlak G_w ($\text{Im } w > 0$) conform afbeeldt op G_z . Volgens de stelling van Riemann bestaat een dergelijke functie en daar de randen van G_z en G_w bestaan uit eindig veel continu differentieerbare wegen, zal $f(w)$ ook nog continu zijn tot op de rand van G_w , behoudens in punten die corresponderen met oneindig verre hoekpunten van G_z of met $w = \infty$.

Stel dat A_1, A_2, \dots, A_n corresponderen met w_1, w_2, \dots, w_n .



w-vlak

Deze punten moeten zeker in de "goede" volgorde liggen, zodat (eventueel na omnummeren) men kan veronderstellen, dat

$$w_1 < w_2 < \dots < w_n.$$

Verder zullen we voorlopig veronderstellen, dat alle w_k 's eindig zijn (indien dit niet zo zou zijn dan kan men dit door een gebroken lineaire transformatie verhelpen - zie hierachter).

We zullen straks bewijzen dat dan voor de afgeleide van $f(w)$ geldt:

$$\frac{dz}{dw} = f'(w) = C \prod_{k=1}^n (w-w_k)^{-\mu_k}, \quad (3)$$

waarin C een (complexe) constante $\neq 0$ is en de functies $(w-w_k)^{-\mu_k}$ eenwaardig gedefinieerd zijn door de eis dat $(w-w_k)^{-\mu_k}$ positief reëel is

voor w reëel $> w_k$. Dat zoiets als (3) moet gelden is eenvoudig in te zien. Loopt men langs de rand van G_w dan neemt bij het passeren van w_k $\arg \frac{dz}{dw}$ met $\pi \mu_k$ "toe". Dit klopt met (3), want $\arg(w-w_k)^{-\mu_k}$ is $-\pi \mu_k$ voor $w < w_k$ en nul voor $w > w_k$.

Nemen we aan dat (3) bewezen is, dan volgt daaruit

$$z=f(w) = C \int \prod_{k=1}^n (w-w_k)^{-\mu_k} dw + C_1, \quad (4)$$

waarin C_1 een complexe constante is.

Hiermee is dus de vorm van $f(w)$ gevonden.

Het rechterlid van (4) bevat n reële en 2 complexe parameters. Daar, zoals bekend, de afbeeldingsfunctie eenduidig vast ligt, zodra drie der punten w_k gegeven zijn, moeten de overblijvende $n+1$ (reële) parameters bepaald zijn door het feit dat $f(w)$ G_w moet afbeelden op het polygoon-gebied G_z , dat door de grootte van de hoeken (die in (4) reeds optreden) nog niet eenduidig bepaald is.

Daar de n hoekpunten z_k bepaald zijn door $2n$ reële parameters en de n getallen μ_k in verband met (2) $n-1$ hieruit volgende onderling onafhankelijke parameters zijn, blijven er in principe dus juist $n+1$ grootheden over om C , C_1 en $n-3$ der getallen w_k te bepalen. De wijze waarop dit geschiedt hangt af van het probleem, waarmee men bezig is. Een mogelijkheid is bv. (4) te vervangen door

$$z = z_n + C \int_{w_n}^w \prod_{k=1}^n (t-w_k)^{-\mu_k} dt \quad (4a)$$

Daar voor w reëel en $> w_n$ de integraal in (4a) kennelijk positief reëel is, geldt

$$\arg C = \arg(z_1 - z_n).$$

De overblijvende $n-2$ parameters kunnen nu bv. worden bepaald door $n-2$ vergelijkingen van het type

$$|z_k - z_{k-1}| = |C| \int_{w_{k-1}}^{w_k} \prod_{k=1}^n |t-w_k|^{-\mu_k} dt$$

(indien oneindig verre hoekpunten optreden dan kan het niet steeds op deze manier).

We beschouwen nu het geval dat niet alle w_k 's eindig zijn. Zij $f(w)$ zodanig dat (eventueel na omnummeren) $w_1 = \infty$, $w_2 < w_3 < \dots < w_n$. Zij a een reëel getal groter dan w_n . Dan wordt door $w' = \frac{1}{a-w}$ G_w conform afgebeeld op een bovenhalfvlak $G_{w'}$. De punten A_1, A_2, \dots corresponderen nu met de punten w_1', w_2', \dots waarbij $0 = w_1' < w_2' < \dots < w_n' < \infty$. Voor de functie $z=g(w')=f(a-\frac{1}{w'})$ geldt volgens (3)

$$\frac{dz}{dw} = C' \prod_{k=1}^n (w' - w_k')^{-\mu_k}.$$

Daar voor $k > 1$ $w' - w_k' = \frac{1}{a-w} - \frac{1}{a-w_k} = \frac{w-w_k}{(a-w)(a-w_k)}$ en voor $k=1$ $w' - w_1' = \frac{1}{a-w}$, volgt hieruit

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dw} &= \frac{dz}{dw'} \cdot \frac{dw'}{dw} = \frac{1}{(a-w)^2} \cdot \frac{C'}{(a-w)^{-\mu_1}} \prod_{k=2}^n \left\{ \frac{w-w_k}{(a-w)(a-w_k)} \right\}^{-\mu_k} = \\ &= \frac{C'}{(a-w)^2} \cdot (a-w)^{\sum_{k=1}^n \mu_k} \cdot \prod_{k=2}^n \left(\frac{w-w_k}{a-w_k} \right)^{-\mu_k} = \\ &= C \prod_{k=2}^n (w-w_k)^{-\mu_k}, \end{aligned}$$

met $C = C' \prod_{k=2}^n (a-w_k)^{\mu_k}$, waarbij gebruik is gemaakt van (2). Vergelijking met (3) $\prod_{k=2}^n$ leert dat formule (3) blijft gelden mits de factor $(w-w_1)^{-\mu_1}$ wordt weggelaten.

B. Bewijs van formule (3) voor het geval dat alle punten z_k eindig zijn.

Daar $f(w)$ G_w conform afbeeldt op G_z is $f(w)$ analytisch en eenwaardig voor $\text{Im } w > 0$, en hier geldt $f'(w) \neq 0$.

Daar $f(w)$ de lijnstukken (w_k, w_{k+1}) afbeeldt op lijnstukken (z_k, z_{k+1}) geldt dit volgens het spiegelingsprincipe ook nog voor $\text{Im } w = 0$, $w \neq w_k$ ($k=1, 2, \dots, n$).

Zij

$$F(w) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f''(w)}{f'(w)} \quad (5)$$

Deze functie is dus ook analytisch voor $\text{Im } w \geq 0$, $w \neq w_k$ ($k=1, 2, \dots, n$).

Verder is $F(w)$ reëel voor $\text{Im } w = 0$. Immers, zij $\gamma_k \stackrel{\text{def}}{=} \arg(z_{k+1} - z_k)$ en zij

$$\lambda_k(w) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-i\gamma_k} \{ f(w) - z_k \}.$$

Dan is de functie $\lambda_k(w)$ reëel voor $w_k < w < w_{k+1}$, dus ook z'n afgeleiden. Daar

$$\frac{\lambda_k''(w)}{\lambda_k'(w)} = \frac{f''(w)}{f'(w)} = F(w)$$

volgt hieruit de realiteit van $F(w)$ voor $\text{Im } w = 0$.

We beschouwen nu het gedrag van $F(w)$ in de omgeving van een punt w_k .

Zij C_w een halve cirkel-omgeving van w_k : $\text{Im } w > 0$, $|w - w_k| < \rho$ (zie figuur 1A), met ρ voldoende klein, b.v. $\rho < \min(w_k - w_{k-1}, w_{k+1} - w_k)$. Daar $f(w)$ analytisch is in C_w en continu is tot op de rand van C_w , wordt door $z = f(w)$ C_w afgebeeld op een sector-vormig gebied C_z (zie figuur 1B).

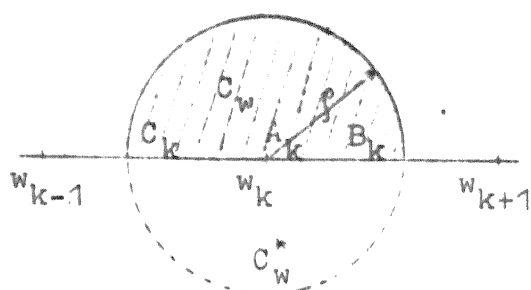


fig. 1A. w-vlak

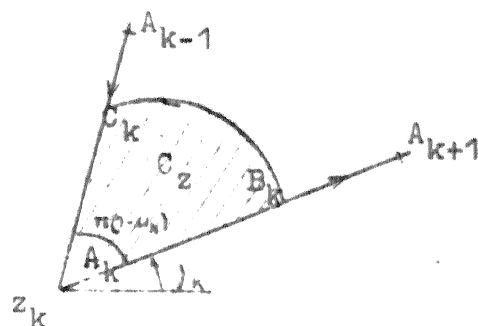


fig. 1B. z-vlak

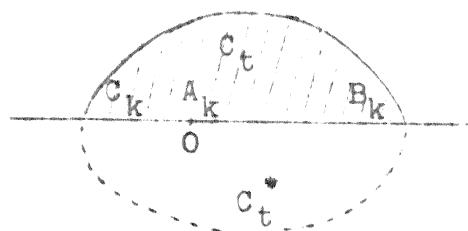


fig. 1C. t-vlak

Zij γ_k de hoek die de lijn (z_k, z_{k+1}) maakt met de positief reële as.

Beschouw de afbeelding $t = \phi_k(z) \stackrel{\text{def}}{=} \left[e^{-i\gamma_k(z-z_k)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha_k}}$

Deze beeldt het gebied C_z af op een gebied C_t , waarbij de lijnstukken

$C_k A_k$, resp. $A_k B_k$ worden afgebeeld op delen van de negatief, resp. de positief reële as. Beschouwt men nu t als functie van w

$$t = \psi_k(w) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_k \{ f(w) \} = \left[e^{-i\gamma_k \{ f(w) - z_k \}} \right]^{\frac{1}{1-\alpha_k}} \quad (6)$$

dan wordt C_w op C_t afgebeeld, waarbij de rechte lijn $C_k A_k B_k$ overgaat in een rechte lijn. Volgens het spiegelingsbeginsel kan $\psi_k(w)$ dus analytisch worden voortgezet in de gespiegelde halve cirkel C_w^* . $\psi_k(w)$ kan dus in een Taylor-reeks om w_k worden ontwikkeld, waarvan de convergentie-straal minstens ρ is:

$$\psi_k(w) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m (w - w_k)^m, \quad \text{met } a_1 \neq 0. \quad (7)$$

Dat de reeks begint bij $m=1$, is duidelijk, daar $t \rightarrow 0$ voor $w \rightarrow w_k$. Dat $a_1 \neq 0$ moet zijn komt omdat de afbeelding van $C_w + C_w^*$ op $C_t + C_t^*$ conform moet zijn, zodat $\frac{d\psi_k}{dw} \neq 0$ moet zijn in $C_w + C_w^*$, dus zeker in w_k .

Uit (6) volgt

$$f(w) = z_k + e^{i\gamma_k} [\psi_k(w)]^{1-\alpha_k}$$

en daaruit
$$f'(w) = e^{i\gamma_k(1-\alpha_k)} \psi_k'(w) \cdot [\psi_k(w)]^{-\alpha_k}.$$

Dus, daar $\alpha_k \neq 1$,

$$F(w) = \frac{f''(w)}{f'(w)} = \frac{d}{dw} \log f'(w) = \frac{\psi_k''(w)}{\psi_k'(w)} - \alpha_k \frac{\psi_k'(w)}{\psi_k(w)}. \quad (8)$$

Uit (7) volgt

$$\psi'_k(w) = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m (w-w_k)^{m-1}$$

$$\psi''_k(w) = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m (w-w_k)^{m-2},$$

en dus, daar $a_1 \neq 0$

$$\frac{\psi''_k(w)}{\psi'_k(w)} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (w-w_k)^m,$$

$$\frac{\psi'_k(w)}{\psi_k(w)} = \frac{1}{w-w_k} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m (w-w_k)^m,$$

$$F(w) = -\frac{\psi'_k}{w-w_k} + \sum_{m=0}^{\infty} d_m (w-w_k)^m. \quad (9)$$

Het is niet moeilijk om in te zien dat de convergentie-straal van de reeks in (9) weer minstens ρ is, dit doet echter niet terzake, als hij maar positief is en dat is zo, omdat in $C_w + C_w^*$ ψ'_k en $\psi_k' \neq 0$ zijn (voor $w \neq w_k$).

Daar voor iedere k een resultaat van het type (8) geldt (met verschillende coëfficiënten d_m) blijkt:

$$\text{de functie } F_1(w) \stackrel{\text{def}}{=} F(w) + \sum_{k=1}^n \frac{\psi'_k}{w-w_k}$$

is analytisch voor $\text{Im } w \geq 0$ en reëel voor $\text{Im } w = 0$ en dus (spiegelingsprincipe) analytisch in het hele complexe vlak, d.w.z. een gehele functie.

Om $F_1(w)$ te bepalen onderzoeken we nu het gedrag van $f(w)$ voor $w \rightarrow \infty$. Het punt $w = \infty$ ligt op de rand van G_w en wordt door $f(w)$ dus afgebeeld op een punt z_∞ van het lijnstuk (z_n, z_1) . Stelt men $w' = -\frac{1}{w}$ dan wordt een halve cirkel-omgeving van $w' = 0$ afgebeeld op een halve omgeving van $z = z_\infty$. Met het spiegelingsprincipe volgt daaruit weer dat voor $|w| > R$ (R voldoende groot)

$$f(w) = z_\infty + \sum_{m=1}^{\infty} a_m w^{-m}, \text{ met } a_1 \neq 0,$$

en dus

$$f'(w) = - \sum_{m=1}^{\infty} m a_m w^{-m-1},$$

$$f''(w) = \sum_{m=1}^{\infty} m(m+1) a_m w^{-m-2},$$

$$F(w) = -\frac{2}{w} + \sum_{m=2}^{\infty} b_m w^{-m}. \quad (10)$$

Er geldt dus $\lim_{w \rightarrow \infty} F(w) = 0$ en dus ook $\lim_{w \rightarrow \infty} F_1(w) = 0$. Op grond van de stelling van Liouville moet $F_1(w)$ dus identiek nul zijn, waaruit volgt

$$F(w) = \frac{f''(w)}{f'(w)} = - \sum_{k=1}^n \frac{\psi'_k}{w-w_k}. \quad (10a)$$

Door integratie volgt hieruit

$$\log f'(w) = - \sum_{k=1}^n \mu_k \log(w-w_k) + \log C$$

en dus

$$f'(w) = C \prod_{k=1}^n (w-w_k)^{-\mu_k},$$

waarmee (3) bewezen is.

Opmerking: Uit (10) volgt $\lim_{w \rightarrow \infty} wF(w) = -2$. Dit is in overeenstemming met (10a), daar $\sum_{k=1}^n \mu_k = 2$.

C. Bewijs van formule (3) in het geval dat een of meerdere hoekpunten in het oneindige liggen.

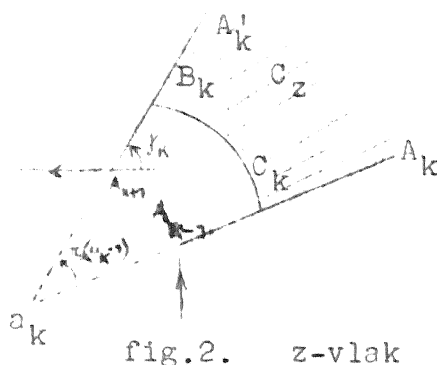
Op grond van het bovenstaande is het duidelijk dat het voldoende is om aan te tonen dat ook indien het punt w_k correspondeert met een hoekpunt in het oneindige, een formule van het type (9) geldt. Bij het bewijs hiervan gaat het er om, een functie $t = \phi_k(z)$ te vinden die de "binnen" het polygoon liggende "omgeving" van A_k afbeeldt op een halve omgeving van $t=0$.

1°. We beschouwen eerst het geval $1 < \mu_k \leq 3$, waarbij het geval dat $\mu_k = 2$ of 3 en de lijnen $A_{k-1} A_k$ en $A_k A_{k+1}$ niet op dezelfde rechte liggen, wordt uitgesloten.

De lijnen $A_{k-1} A_k$ en $A_k A_{k+1}$ hebben in dit geval steeds een eindig punt gemeen, stel $z = a_k$. $f(z)$ beeldt nu een halve cirkel-omgeving C_w

van w_k af (zie figuur 1a) op het gebied C_z (zie figuur 2). Zij γ_k de hoek die de lijn $A_{k+1} A_k$ maakt met de positief reële as. Beschouw de afbeelding

$$t = \phi_k(z) = \frac{1}{\left[e^{-i\gamma_k}(z-a_k) \right]^{\mu_k-1}}$$



Deze beeldt C_z af op een halve omgeving C_t van $t=0$, waarbij $C_k A_k$ en $A_k B_k$ afgebeeld worden op delen van de negatief, resp. de positief reële as (vgl. figuur 1c) want voor z op $B_k A_k$ is $e^{-i\gamma_k}(z-a_k)$ positief reëel, en voor z op $C_k A_k$ is $\arg [e^{-i\gamma_k}(z-a_k)] = -\pi(\mu_k-1)$ en dus $\arg \phi_k(z) = \pi$.

Op dezelfde wijze als hierboven volgt hieruit

$$t = \psi_k(w) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_k \{ f(w) \} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m (w-w_k)^m, \text{ met } a_1 \neq 0.$$

En, daar $f(w) = a_k e^{i\gamma_k [\psi_k(w)]^{-\mu_k+1}}$, geldt weer

$$F(w) = \frac{f''(w)}{f'(w)} = \frac{\psi_k''(w)}{\psi_k'(w)} - \mu_k \frac{\psi_k'(w)}{\psi_k(w)} = -\frac{\mu_k}{w-w_k} + \sum_{m=1}^{\infty} d_m (w-w_k)^m \quad (9a)$$

(vgl. (8) en (9)).

2°. Zij nu $\mu_k=1$. De lijnen $A_{k-1}A_k$ en $A_{k+1}A_k$ zijn nu evenwijdig en gelijk gericht. Stel hun afstand d_k ($d_k > 0$). $f(w)$ beeldt nu een halve

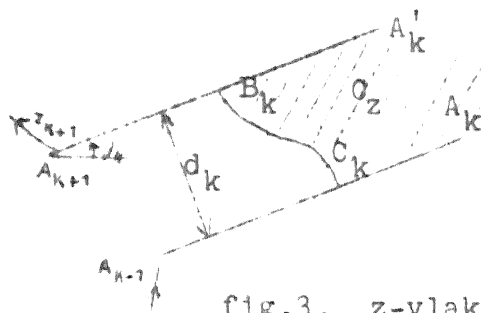


fig.3. z-vlak

cirkel omgeving C_w van w_k (zie figuur 1a) af op het gebied C_z (zie figuur 3). Zij γ_k de hoek die $A_{k+1}A_k$ maakt met de positief reële as. Beschouw de afbeelding $t = \phi_k(z) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\frac{\pi}{d_k} e^{-i\gamma_k} (z-z_{k+1})}$

Deze beeldt C_z af op een halve omgeving C_t van $t=0$, waarbij $C_k A_k$ en $A_k B_k$ afgebeeld worden op delen van de negatief, resp. de positief reële as (vgl. figuur 1C), want voor z op $B_k A_k$ is $e^{-i\gamma_k(z-z_k)}$ reëel, dus $\arg \phi_k = 0$ en voor z op $A_k C_k$ is $\text{Im} \{ e^{-i\gamma_k(z-z_k)} \} = -d_k$ en dus $\arg \phi_k(z) = \pi$.

Derhalve geldt weer

$$t = \psi_k(w) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_k \{ f(w) \} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m (w-w_k)^m, \text{ met } a_1 \neq 0 \text{ en daar}$$

$$f(w) = z_{k+1} - \frac{d_k}{\pi} e^{i\gamma_k} \log \psi_k(w), \text{ geldt}$$

$$F(w) = \frac{f''(w)}{f'(w)} = \frac{\psi_k''(w)}{\psi_k'(w)} - \frac{\psi_k'(w)}{\psi_k(w)} = -\frac{1}{w-w_k} + \sum_{m=1}^{\infty} d_m (w-w_k)^m. \quad (9b)$$

3°. *) Zij $\mu_k=2$. De afstand d_k van $A_{k-1}A_k$ en $A_k A_{k+1}$ kan nu zowel positief, nul, als negatief zijn (zie fig.4) (het geval $d_k=0$ valt ook onder 2°). $f(w)$

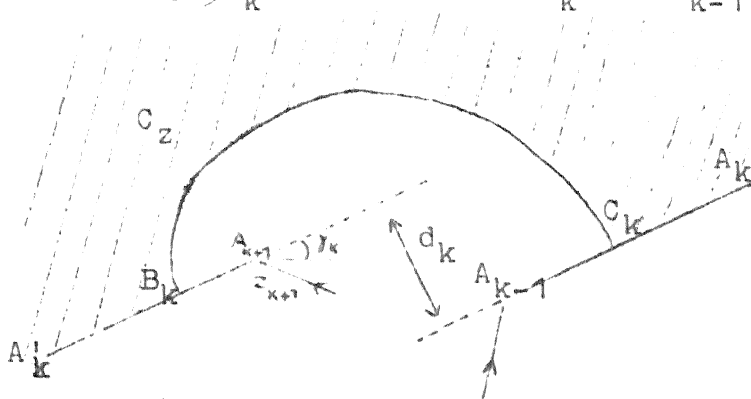


fig.4. z-vlak

beeldt nu een halve cirkel-omgeving C_w van w_k (zie fig. 1a) af op het gebied C_z (zie fig.4). Zij γ_k de hoek die $A_k' A_{k+1}$ maakt met de positief reële as. Beschouw de afbeelding

$$t = \phi_k(z),$$

*) De behandelingswijze van 3° en 4° is aangegeven door Dr Peremans.

die gedefinieerd is doordat zijn inverse is

$$z = z_{k+1} - e^{i\gamma_k} \left\{ \frac{1}{t} + \frac{d_k}{\pi} \log t \right\}$$

Deze beeldt C_z af op een halve omgeving C_t van $t=0$ (zie figuur 1c), waarbij $C_k A_k$ en $A_k B_k$ afgebeeld worden op delen van de negatief, resp. positief reële as. Immers, voor $t > 0$ (doch niet te groot) is

$e^{-i\gamma_k}(z-z_{k+1})$ negatief reëel en voor $t < 0$ (doch niet te klein) is

$e^{-i\gamma_k}(z-z_{k+1}) + id_k$ positief reëel. Voor $|t| \rightarrow 0$ gaat $|z| \rightarrow \infty$, terwijl $\arg(z-z_{k+1}) = \pi + \gamma_k - \arg t + \arg(1 + \frac{td_k}{\pi} \log t) \rightarrow \pi + \gamma_k - \arg t$. Daar

$\frac{dz}{dt} = e^{i\gamma_k} \left\{ \frac{1}{t^2} - \frac{d_k}{\pi t} \right\} \neq 0$ voor $|t|$ voldoende klein en $\neq 0$ (dus $|z|$ voldoende groot), is de afbeelding éénéénduidig, zodat ook het omgekeerde van de bovenstaande beweringen geldt. Derhalve geldt weer

$$t = \psi_k(w) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_k \{ f(w) \} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m (w-w_k)^m \text{ met } a_1 \neq 0$$

en daar $f(w) = z_{k+1} - e^{i\gamma_k} \left[\frac{1}{\psi_k(w)} + \frac{d_k}{\pi} \log \psi_k(w) \right]$,

geldt

$$\begin{aligned} f'(w) &= e^{i\gamma_k} \frac{\psi_k'(w)}{\psi_k^2(w)} \left\{ 1 - \frac{d_k}{\pi} \psi_k(w) \right\} \text{ en} \\ F(w) &= \frac{f''(w)}{f'(w)} = \frac{\psi_k''(w)}{\psi_k'(w)} - 2 \frac{\psi_k'(w)}{\psi_k(w)} - \frac{\frac{d_k}{\pi} \psi_k'(w)}{1 - \frac{d_k}{\pi} \psi_k(w)} = \\ &= -\frac{2}{w-w_k} + \sum_{m=0}^{\infty} d_m (w-w_k)^m. \end{aligned} \quad (9c)$$

4°. Zij tenslotte $\gamma_k = 3$. $A_{k-1}A_k$ en $A_{k+1}A_k$ zijn nu weer gelijkgericht. Stel hun afstand $d_k, d_k > 0$ (het geval $d_k = 0$ valt ook onder 2°.).

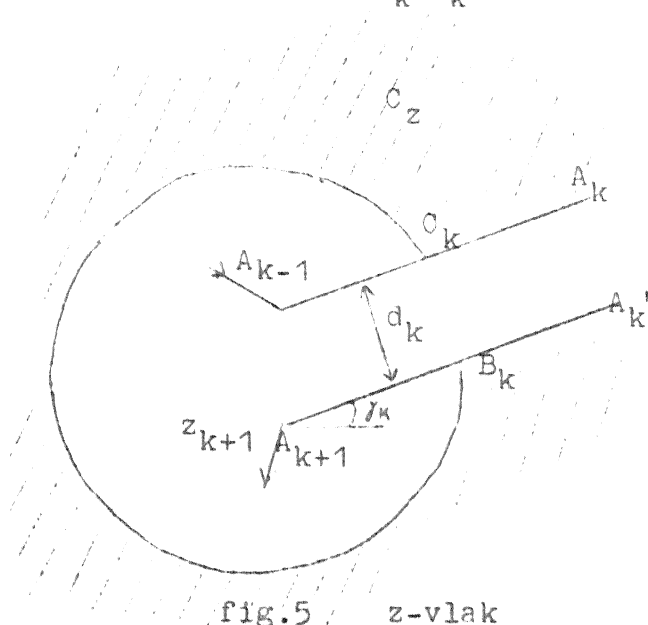


fig.5 z-vlak

Het beeld C_z van een halve cirkel-omgeving C_w van w_k is aangegeven in fig.5. Zij γ_k de hoek die $A_{k+1}A_k$ maakt met de positief reële as. Beschouw nu de afbeelding $t = \phi_k(z)$, waarvan de inverse is

$$z = z_{k+1} + e^{i\gamma_k} \left\{ \frac{1}{t} + \frac{d_k}{\pi} \log t \right\}$$

Op dezelfde manier als in 3° blijkt dat hierdoor C_z wordt afgebeeld op een halve omgeving C_t van $t=0$ (voor $t > 0$ (en niet te groot) is

$e^{-i\gamma_k}(z-z_{k+1})$ positief reëel, voor $t < 0$ (en niet te klein) is

$e^{-i\gamma_k}(z-z_{k+1}) - id_k$ negatief reëel).

Dus weer $t = \psi_k(w) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_k \{ f(w) \} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (w-w_k)^m$, met $a_1 \neq 0$.

Uit $f(w) = z_{k+1} + e^{1/\gamma_k} \left[\frac{1}{\psi_k^2(w)} + \frac{d_k}{\pi} \log \psi_k(w) \right]$ volgt

$$f'(w) = -e^{1/\gamma_k} \frac{\psi_k'(w)}{\psi_k^3(w)} \left\{ 1 - \frac{d_k}{\pi} \psi_k^2(w) \right\}$$

en dus

$$\begin{aligned} F(w) = \frac{f''(w)}{f'(w)} &= \frac{\psi_k''(w)}{\psi_k'(w)} - 3 \frac{\psi_k'(w)}{\psi_k(w)} - \frac{\frac{2d_k}{\pi} \psi_k'(w)}{1 - \frac{d_k}{\pi} \psi_k^2(w)} = \\ &= -\frac{3}{w-w_k} + \sum_{m=0}^{\infty} d_m (w-w_k)^m. \end{aligned} \quad (9d)$$

Hiermee is de geldigheid van formule (9) voor alle gevallen aangetoond.

D. Afbeelding van het uitwendige van een polygoon op een halfvlak.

Zij G_z het uitwendige van een begrensd enkelvoudig gesloten polygoon $A_1 A_2, \dots, A_n$. De nummering van A_1, A_2, \dots zij in de bij G_z behorende normale volgorde en de hoeken

$\pi \mu_k$ worden als in A gedefinieerd.

Er geldt nu

$$\begin{aligned} -1 &\leq \mu_k < 1, \\ \sum_{k=1}^n \mu_k &= -2. \end{aligned} \quad (11)$$

Gevraagd wordt een functie $f(w)$ die het bovenhalfvlak G_w afbeeldt op G_z . Daar nu $z = \infty$ een inwendig punt van G_z is, zal er een punt w_∞ (met $\text{Im } w_\infty > 0$) in G_w moeten zijn, waar $f(w)$ niet begrensd, en dus niet analytisch en niet conform is. In alle andere punten van G_z moet $f(w)$ analytisch (en eenwaardig) zijn.

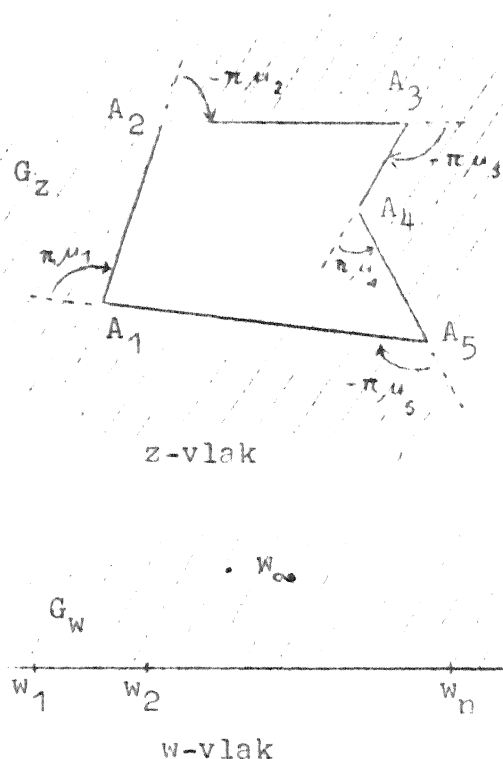
Veronderstel weer dat alle getallen w_1, w_2, \dots, w_n eindig zijn.

Op precies dezelfde manier als in B. bewijst men dat de functie

$F(w) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f''(w)}{f'(w)}$ de volgende eigenschappen heeft:

1°. $F(w)$ is analytisch voor $\text{Im } w \geq 0$, behalve in $w = w_1, w_2, \dots, w_n$ en w_∞ en reëel voor $\text{Im } w = 0$.

2°. $F(w) + \frac{\mu_k}{w-w_k}$ is analytisch in w_k .



$$3^0. F(w) = -\frac{2}{w} + \sum_{m=2}^{\infty} b_m w^{-m} \text{ voor } |w| > R \text{ (R voldoende groot)} \quad (12)$$

We onderzoeken nu het gedrag van $F(w)$ bij $w=w_{\infty}$. De functie $t=g(w) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{f(w)}$ moet een omgeving van $w=w_{\infty}$ afbeelden op een volle omgeving van $t=0$. Daaruit volgt:

$$g(w) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m (w-w_{\infty})^m, \text{ met } a_1 \neq 0. \quad (13)$$

(als $a_1=0$ dan is $g'(w_{\infty})=0$ en g is niet conform bij $w=w_{\infty}$).

$$\text{Uit } f'(w) = -\frac{g'(w)}{g^2(w)} \text{ volgt}$$

$$\begin{aligned} F(w) &= \frac{f''(w)}{f'(w)} = \frac{g''(w)}{g'(w)} - 2 \frac{g'(w)}{g(w)} = \\ &= -\frac{2}{w-w_{\infty}} + \sum_{m=0}^{\infty} b_m (w-w_{\infty})^m \end{aligned} \quad (14)$$

Combinatie met de bovengenoemde resultaten levert nu: de functie

$$F_1(w) \stackrel{\text{def}}{=} F(w) + \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{w-w_k} + \frac{2}{w-w_{\infty}} + \frac{2}{w-\bar{w}_{\infty}}$$

is analytisch voor $\text{Im } w > 0$ en reëel voor $\text{Im } w=0$ en dus (spiegelingsbeginsel) een gehele functie. Daar (dank zij (12)) $\lim_{w \rightarrow \infty} F_1(w)=0$, geldt $F_1(w) \equiv 0$ (Liouville) en dus

$$F(w) = -\sum_{k=1}^n \frac{u_k}{w-w_k} - \frac{2}{w-w_{\infty}} - \frac{2}{w-\bar{w}_{\infty}}, \quad (15)$$

waaruit door integratie volgt

$$\frac{dz}{dw} = f'(w) = C \cdot \frac{\prod_{k=1}^n (w-w_k)^{-u_k}}{(w-w_{\infty})^2 (w-\bar{w}_{\infty})^2} \quad (16)$$

(C is een complexe integratie constante).

Ogenschiijnlijk hebben we nu een complexe parameter (w_{∞}) meer dan in de vorige gevallen. Er bestaat echter een (complexe) relatie tussen w_1, w_2, \dots, w_n en w_{∞} :

$$\sum_{k=1}^n \frac{u_k}{w_{\infty}-w_k} + \frac{2}{w_{\infty}-\bar{w}_{\infty}} = 0. \quad (17)$$

Uit (13) volgt namelijk

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{g(w)} = \frac{1}{a_1 (w-w_{\infty}) \left\{ 1 + \frac{a_2}{a_1} (w-w_{\infty}) + \dots \right\}} = \\ &= \frac{1}{a_1 (w-w_{\infty})} + c_0 + c_1 (w-w_{\infty}) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{en dus } f'(w) &= - \frac{1}{a_1(w-w_\infty)^2} + c_1 + \dots = \\ &= - \frac{1}{a_1(w-w_\infty)^2} \{ 1 + d_2(w-w_\infty)^2 + \dots \}, \end{aligned}$$

zodat

$$F(w) = \frac{d}{dw} \log f'(w) = - \frac{2}{w-w_\infty} + 2d_2(w-w_\infty) + \dots$$

De coefficient b_0 in (14) is dus nul, of anders gezegd,

$$\lim_{w \rightarrow w_\infty} \left\{ F(w) + \frac{2}{w-w_\infty} \right\} = 0.$$

Vult men hier voor $F(w)$ het rechterlid van (15) in dan ontstaat (17).

Opmerkingen 1. Uit (12) volgt $\lim_{w \rightarrow \infty} wF(w) = -2$. Dit klopt met (15), daar

$$\sum_{k=1}^n \mu_k = -2.$$

2. Dat in de ontwikkeling van $f'(w)$ bij $w=w_\infty$ geen term met $(w-w_\infty)^{-1}$ mag voorkomen, is duidelijk. Bij integratie zou dit voor $f(w)$ een term met $\log(w-w_\infty)$ geven, zodat $f(w)$ niet eenwaardig zou zijn bij w_∞ . Door ontwikkeling van het rechterlid van (16) bij $w=w_\infty$ vindt men als voorwaarde hiervoor natuurlijk weer (17).

3. Indien een der punten w_k , b.v. w_1 in het oneindige ligt dan moet in (16) de factor $(w-w_1)^{-\mu_1}$ en in (17) de term $(w_\infty-w_1)^{-1}$ weggelaten worden. Men bewijst dit op dezelfde manier als in A.

E. Afbeelding van een polygoon-gebied op het inwendige van de eenheids-cirkel.

Kent men de afbeelding van het inwendige van een polygoon op het bovenhalfvlak $\text{Im } w > 0$, dan kan men door een gebroken lineaire transformatie, b.v. $w = i \frac{t-1}{t+1}$ overgaan op het inwendige van de eenheidscirkel.

Uit (3) vindt men

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dw} \frac{dw}{dt} = C' \prod_{k=1}^n (t-t_k)^{-\mu_k} \quad (18)$$

waarin $t_k = \frac{w_k-1}{w_k+1}$. Deze formule heeft geheel dezelfde vorm als (3). De punten t_k liggen nu echter op de eenheidscirkel.

Evenzo vindt men uit (16) voor de afbeelding $z=g(t)$ van het inwendige van de eenheidscirkel op het uitwendige van een begreënsd polygoon uit (16)

$$\frac{dz}{dt} = C' \cdot \frac{\prod_{k=1}^n (t-t_k)^{-\mu_k}}{(t-t_\infty)^2 (t\bar{t}_\infty - 1)^2} \quad (19)$$

De relatie (17) geeft na enige herleiding

$$\sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{t_\infty - t_k} + \frac{2}{t_\infty - \bar{t}_\infty - 1} = 0. \quad (20)$$

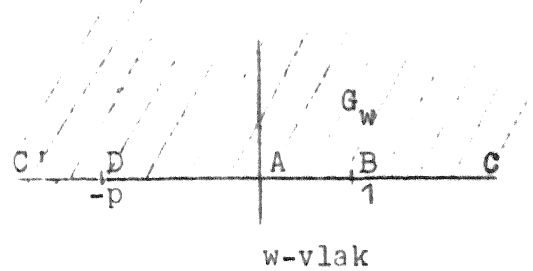
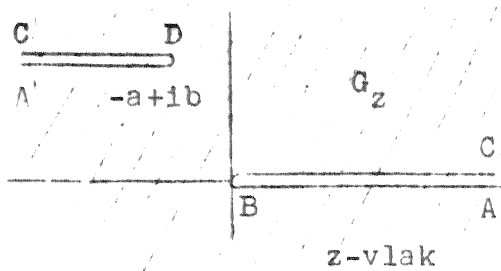
Eist men $t_{\infty}=0$, dan luidt (19) $\frac{dz}{dt} = c' \cdot \frac{1}{t^2} \prod_{k=1}^n (t-t_k)^{\mu_k}$. De getallen t_k moeten dan voldoen aan $\sum_{k=1}^n (\mu_k/t_k)=0$. Er kan nu slechts één der t_k 's vrij gekozen worden. Tenslotte kan men door $s=-\frac{1}{t}$ overgaan op het uitwendige van de eenheidscirkel. In het geval dat $s=\infty$ afgebeeld wordt op $z=\infty$ vindt men

$$\frac{dz}{ds} = c'' \frac{1}{s^2} \prod_{k=1}^n (s-s_k)^{\mu_k},$$

met als relatie tussen de s_k $\sum_{k=1}^n \mu_k s_k = 0$.

2.6. Toepassingen.

A. Zij G_z het volle z -vlak verminderd met de coupures ABC en C'DA' (zie figuur). Gevraagd dit gebied af te beelden op het boven-halvlak G_w met de aangegeven correspondenties. Het getal p kan niet a priori worden gegeven, slechts is bekend dat $p > 0$.



De getallen μ , behorende bij de hoekpunten A, B, C en D zijn resp. 2, -1, 2 en -1 (som 2). Volgens Schwarz-Christoffel geldt dus

$$\frac{dz}{dw} = C \cdot \frac{(w-1)(w+p)}{w^2} \quad (1)$$

waarin C positief is, daar voor $w > 1$ $\frac{dz}{dw} > 0$ is. (Daar in A $w=0$ en in C $w=\infty$ geëist wordt, bevat de noemer in (1) slechts de factor w^2 , hetgeen de integratie zeer eenvoudig maakt). Uit (1) volgt door integratie $z = C \left\{ w + (p-1) \log w + \frac{p}{w} - p-1 \right\}$, (2)

waarbij de integratie-constante is bepaald door de eis dat $z=0$ voor $w=1$ (logarithme reël voor $w > 0$).

Voor $w < 0$ (reël) is $\log w = \pi i + \log |w|$ (logarithme reël). Hieruit volgt dat voor $w < 0$ $\text{Im } z = (p-1)\pi C$, en dus moet

$$(p-1)\pi C = b. \quad (3)$$

Voor $b=0$ geeft dit $p=1$ (want $C \neq 0$) en dus

$$z = \frac{1}{4} C \left(w + \frac{1}{w} - 2 \right) \quad (4)$$

(De waarde van C volgt uit $z(-1) = -a$).

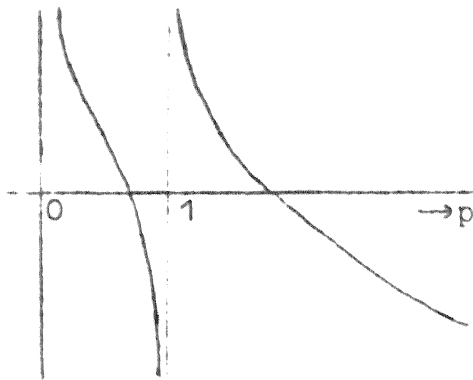
Zij nu $b \neq 0$. Dan volgt uit (3) en (2)

$$z = \frac{b}{\pi} \log w + \frac{b}{\pi(p-1)} \left(w + \frac{p}{w} - p-1 \right). \quad (5)$$

Uit $\text{Re } w(-1) = -a$ volgt nu $a = -\frac{b}{\pi} \log p + \frac{2b}{\pi} \frac{p+1}{p-1}$, of

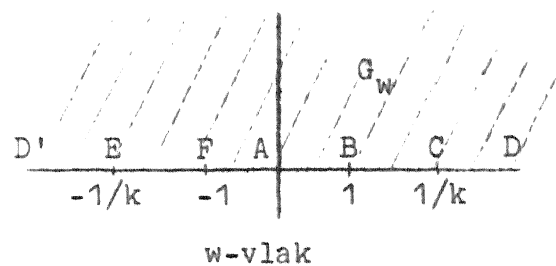
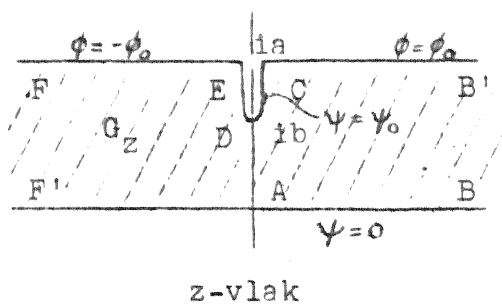
$$\frac{\pi a}{b} = 2 \frac{p+1}{p-1} - \log p. \quad (6)$$

Uit deze transcendente vergelijking moet het getal p bepaald worden. De functie uit het rechterlid is voor $p > 0$ monotoon dalend en neemt iedere reële waarde tweemaal aan, eenmaal tussen 0 en 1 en eenmaal tussen 1 en ∞ (zie figuur). Daar de constante C positief moet zijn



volgt echter uit (3) dat $p > 1$ voor $b > 0$ en $p < 1$ voor $b < 0$. Hierdoor is p dus eenduidig bepaald (uit (5) volgt eenvoudig dat, als bij $b=b_0$ $p=p_0$ behoort, bij $b=-b_0$ $p=1/p_0$ behoort).

B. Beschouw het derde voorbeeld uit § 2.4 (zie figuren).



De getallen μ bij B, C, D, E en F zijn resp. $1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}, 1$ (som 2).

En dus

$$z = C \int_0^w \frac{du}{(1-u^2) \sqrt{1-k^2 u^2}}$$

(voor $w=0$ is $z=0$). De integraal kan worden berekend met de substituties $u = \frac{1}{k} \sin t$, $\tan t = s$ en men vindt

$$z = \frac{C}{2k'} \log \frac{\sqrt{1-k^2 w^2} + k'w}{\sqrt{1-k^2 w^2} - k'w}, \quad (8)$$

waarin $k' \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1-k^2}$ (logarithme reëel en wortel positief voor $-1 < w < 1$).

De nog onbekende getallen C (positief) en k ($0 < k < 1$) vindt men als volgt.

1°. Voor $1 < w \leq \frac{1}{k}$ is $\sqrt{1-k^2 w^2} - k'w$ negatief en wel geldt, indien men de reële as vanuit G_w nadert

$$\arg(\sqrt{1-k^2 w^2} - k'w) = -\pi.$$

Hier geldt dus

$$z = \frac{\pi i C}{2k'} + \frac{C}{2k'} \log \frac{k'w + \sqrt{1-k^2 w^2}}{k'w - \sqrt{1-k^2 w^2}},$$

(logarithme reëel), waaruit volgt $C = \frac{2\pi}{\pi} k'$ (9)

2°. Voor $w > \frac{1}{k}$ geldt $\sqrt{1-k^2w^2} = -1\sqrt{k^2w^2-1}$ (wortel positief) en dus

$$\begin{aligned} z &= ia + \frac{a}{\pi} \log \frac{k'w-1\sqrt{k^2w^2-1}}{k'w+1\sqrt{k^2w^2-1}} = \\ &= ia \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \arctan \frac{\sqrt{k^2w^2-1}}{k'w} \right\} \end{aligned}$$

(hoofdwaarde van \arctan , d.w.z. tussen 0 en $\frac{\pi}{2}$).

Voor $w = \infty$ volgt hieruit

$$b = a \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctan \frac{k}{k'} \right),$$

$$\text{dus } \frac{k}{k'} = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} = \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{a-b}{a}\right) = \cotn \frac{\pi b}{2a},$$

$$k = \cos \frac{\pi b}{2a}, \quad (10)$$

(hieruit blijkt dat er - zoals te verwachten was - een 1-1 correspondentie tussen k uit $0 \leq k < 1$ en de verhoudingen b/a , met $0 < b/a \leq 1$, is).

Opmerkingen.

1. Uit (8) en (9) volgt

$$\frac{\sqrt{1-k^2w^2}+k'w}{\sqrt{1-k^2w^2}-k'w} = e^{\pi z/a}$$

waaruit na enig rekenen volgt

$$w = \frac{\sinh(\pi z/2a)}{\sqrt{\cosh^2(\pi z/2a) - k^2}},$$

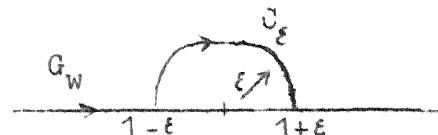
zoals in § 2.4.

2. Het resultaat (9) kan ook direct uit (7) worden gevonden (deze methode is vooral van belang indien de integraal niet in gesloten vorm kan worden bepaald). Zij ε een klein positief getal. Dan is

$$z(1+\varepsilon) - z(1-\varepsilon) = C \int_{C_\varepsilon} \frac{dw}{(1-w^2)\sqrt{1-k^2w^2}},$$

waarin C_ε een halve cirkel met straal ε om het punt $w=1$ is (zie figuur).

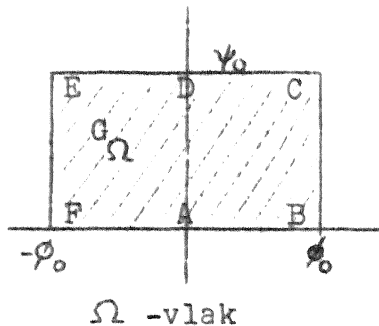
Daar de integrand in $w=1$ een enkelvoudige pool heeft geldt



$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ z(1+\varepsilon) - z(1-\varepsilon) \} = -\pi i \cdot (\text{residu in } w=1) = \frac{\pi i C}{2\sqrt{1-k^2}}.$$

Daar anderzijds $\text{Im}\{z(1+\varepsilon) - z(1-\varepsilon)\} = a$ (voor alle niet te grote ε) volgt hieruit direct (9).

We beschouwen nu het volgende stromings-probleem (stroming door een poreus medium onder een damwand door). Zij BC en EF aequipotentiaal-lijnen met potentialen ϕ_0 , resp. $-\phi_0$ en zij FAB en CDE stroomlijnen (ondoordringbare wanden). Stel langs FAB $\psi=0$. De waarde ψ_0 van ψ langs CDE is niet a priori bekend. Het gebied G_Ω dat met G_Z correspon-



deert ziet er uit als getekend (op grond van de symmetrie is langs AD $\phi=0$, verondersteld is $\phi_0 > 0$).

De afbeelding van G_w op G_Ω is volgens Schwarz-Christoffel

$$\Omega(w) = C \int_0^w \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \quad (11)$$

Voor $w=1$ volgt hieruit (substitutie $u=\sin t$)

$$\phi_0 = C \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = C \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} \quad (12)$$

en voor $w=\infty$ (we mogen integreren langs $u=1$ S, $0 < s < \infty$)

$$\begin{aligned} 1 \quad \psi_0 &= 1 C \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(1+s^2)(1+k^2s^2)}} = (s = \tan t) \\ &= 1 C \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\cos^2 t + k^2 \sin^2 t}} = 1 C \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 t}}. \end{aligned} \quad (13)$$

De integraal in (12) is een z.g. volledige elliptische integraal van de eerste soort met modulus k . Van deze functies van k , die worden aangeduid met $K(k)$, bestaan uitvoerige tabellen. We hebben dus

$$\phi_0 = C K(k), \text{ dus } C = \frac{\phi_0}{K(k)}.$$

Verder volgt uit (13)

$$\psi_0 = \phi_0 \frac{K(k')}{K(k)} = \phi_0 \frac{K(\sin \frac{\pi b}{2a})}{K(\cos \frac{\pi b}{2a})} \quad (14)$$

Hiermee is dus ψ_0 , d.i. de totale stroming onder de damwand, uitgedrukt als functie van b/a . Daar voor $k \rightarrow 1$ $K(k) \rightarrow \infty$ (en wel $K(k) \sim \log \frac{4}{k'}$) en voor $k \rightarrow 0$ $K(k) \rightarrow \frac{\pi}{2}$, geldt voor $b < a$ (bijna afsluiting) $\psi_0 \rightarrow 0$, (nauwkeuriger $\psi_0 \sim \frac{\pi \phi_0}{2 \log(8a/\pi b)}$) en voor $a-b < a$ (zeer ondiepe damwand) $\psi_0 \rightarrow \infty$

(nauwkeuriger $\psi_0 \sim \frac{2\phi}{\pi} \log \frac{8a}{\pi(a-b)}$).

De volgende tabel geeft een indruk van de tussenliggende waarden

b/a	ψ_0/ϕ_0
0.0111	0.29
0.1	0.48
0.2	0.60
0.4	0.87
0.6	1.15
0.8	1.68
0.9	2.06

Om Ω als functie van w (en dus van z) te vinden moet de integraal in (11) worden bepaald (een onvolledige elliptische integraal van de eerste soort). Voor $0 < w < 1$ bestaan tabellen. Met geschikte transformaties kan men hiermee Ω langs de hele rand (d.w.z. voor alle reële w) vinden. Wil men Ω ook in het inwendige bepalen dan kan men beter (11) omkeren door w als functie van Ω te beschouwen. Dit leidt tot de elliptische functies van Jacobi.

De standaardnotatie voor de omkering van (11) is

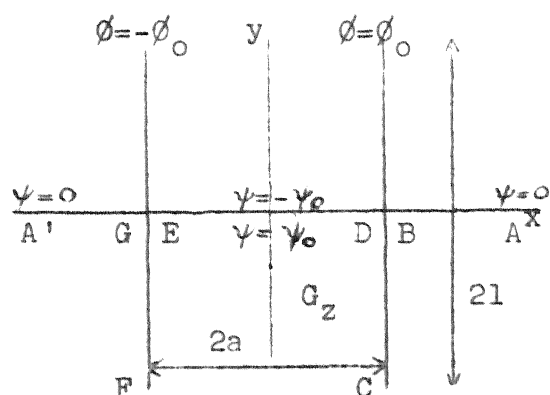
$$w = \operatorname{sn}\left(\frac{K}{\phi_0} \Omega, k\right).$$

De functie $\operatorname{sn}(u, k)$ bezit, evenals de verwante functies $\operatorname{cn}(u, k) = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(u, k)}$ en $\operatorname{dn}(u, k) = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u, k)}$ vele fraaie eigenschappen. Daar bv.

$$\operatorname{sn}(u+iv, k) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn}' v + 1 \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn}' v \operatorname{cn}' v}{1 - \operatorname{du}^2 u \operatorname{sn}'^2 v}$$

(met $\operatorname{dn}' v$ is bedoeld $\operatorname{dn}(v, k')$, etc.) kan men uit tabellen voor reëel argument ook de functie-waarden voor complexe argumenten bepalen.

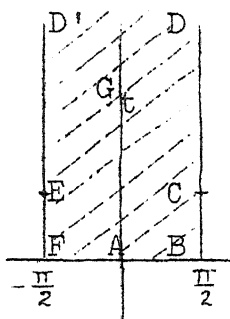
C. Beschouw een condensator, bestaande uit twee evenwijdige platen



met breedte $2l$ en afstand $2a$ (zie figuur - de afmetingen loodrecht op het tekenvlak worden - zoals gebruikelijk - zeer groot verondersteld). Gevraagd wordt de capaciteit (per eenheid van lengte loodrecht op het tekenvlak van de condensator).

Stel de potentiaal van de platen $\pm \phi_0$ en zij de lading (per eenheid van lengte $\pm Q_0$. Dan is de capaciteit (per eenheid van lengte) $C = \frac{Q_0}{2\phi_0}$

(met $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $\alpha > 1$). Het is prettig om inplaats van w de hulp-grootheid t in te voeren, bepaald door $w = \sin t$ (16)



t-vlak

waarbij G_t de halve strook $|\operatorname{Re} t| < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Im} t > 0$ is.

Uit $\frac{d}{dt} = \frac{dw}{dt} \cdot \frac{d}{dw} = \sqrt{1-w^2} \frac{d}{dw}$ volgt dan

$$\frac{dz}{dt} = C_1 \left\{ 1 - \frac{\alpha^2}{\sin^2 t} \right\}, \quad \frac{d\Omega}{dt} = C_2$$

en dus $\Omega = \frac{2\phi_0}{\pi} t$, (17)

$$z = C_1 \left\{ t + \alpha^2 \operatorname{ctn} t \right\} + C_2.$$

Daar voor $t = \pm \frac{\pi}{2}$ $z = \pm a$, moet $C_2 = 0$, $C_1 = \frac{2a}{\pi}$ zijn, zodat

$$z = \frac{2a}{\pi} \left\{ t + \alpha^2 \operatorname{ctn} t \right\}. \quad (18)$$

De parameter α moet nu worden bepaald uit de voorwaarde dat voor $w = \alpha$ $z = a$ is.

Nu geldt voor $t = \frac{\pi}{2} + iv$ ($v \geq 0$)

$$w = \sin t = \cosh v,$$

$$z = a + \frac{2ia}{\pi} \left[v - \alpha^2 \tanh v \right],$$

en dus, daar uit $\cosh v = \alpha$ volgt $v = \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})$ en $\tanh v = \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha}$, moet gelden

$$\frac{\pi a}{2a} = \alpha \sqrt{\alpha^2 - 1} - \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) \quad (19)$$

Daar de afgeleide van het rechterlid van (19) $2\sqrt{\alpha^2 - 1}$ is, is dit voor $\alpha \geq 1$ een monotoon van 0 naar ∞ gaande functie, zodat (19) voor iedere $1/a > 0$ precies één oplossing $\alpha \geq 1$ heeft. Verder zien we dat voor $a \ll 1$ geldt $\alpha^2 \sim \frac{\pi a}{2a}$ (20)

(straks zullen we nauwkeuriger schatten).

Daar voor $\operatorname{Im} t > 0$

$$\operatorname{ctn} t = -i \frac{1 + e^{2it}}{1 - e^{2it}} = -i (1 + 2e^{2it} + 2e^{4it} + \dots)$$

geldt voor $\operatorname{Im} t \geq \pi$ in zeer goede benadering $\operatorname{ctn} t = -i$ en dus

$$z = \frac{2a}{\pi} (t - i\alpha^2),$$

of, met (17), $\Omega = \phi_0 \frac{z}{a} + \frac{2i\phi_0}{\pi} \alpha^2,$

geldig voor

$$\operatorname{Im} z \geq 2a - \frac{2a\alpha^2}{\pi} \quad (\text{en } |\operatorname{Re} z| < a).$$

Voor $a \ll 1$ ligt deze grens op grond van (20) ongeveer bij $\text{Im } z = -1 + 2a$, dus nog ver beneden de lijn $\text{Im } z = 0$. Met name geldt dan dus voor $\text{Im } z = 0$:

$$\psi_0 = \text{Im } \Omega = \frac{2\phi_0}{\pi} \alpha^2 \quad (21)$$

en dus met (15)

$$C = \frac{\alpha^2}{2\pi^2} \quad (22)$$

Opmerking. Een iets nauwkeuriger berekening leert dat voor $y=0$, $-a < x < a$ geldt (als $a \ll 1$)

$$\psi = \frac{2\alpha^2\phi_0}{\pi} (1 + 2e^{-2\alpha^2} \cos \frac{\pi x}{a} + \dots)$$

De relatieve fout in (19) is dus inderdaad van de orde $e^{-\pi l/a}$ en te verwaarlozen zodra $l > 2a$.

Substitueert men in (22) de benadering (20), dan vindt men

$$C = \frac{1}{4\pi a},$$

hetgeen de elementaire benadering is. Voor een betere benadering moet α^2 worden benaderd.

Uit (19) volgt

$$\begin{aligned} \frac{\pi l}{2a} &= \alpha^2 \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}} - \log 2\alpha - \log\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}}\right) = \\ &= \alpha^2 - \frac{1}{2}(1 + \log 4\alpha^2) + \frac{1}{8\alpha^2} + O(\alpha^{-4}), \end{aligned}$$

waaruit men als volgende benaderingen vindt

$$\alpha^2 = \frac{\pi l}{2a} + \frac{1}{2}(1 + \log \frac{2\pi l}{a}) + O\left(\frac{a}{l}\right)$$

en

$$\begin{aligned} \alpha^2 = \frac{\pi l}{2a} &= \frac{1}{2}(1 + \log \frac{2\pi l}{a}) + \frac{a}{2\pi l} \left(\frac{1}{2} + \log \frac{2\pi l}{a}\right) + \\ &+ O\left(\frac{a^2}{l^2} \log \frac{1}{a}\right). \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{4\pi a} \left[1 + \frac{a}{\pi l} (1 + \log \frac{2\pi l}{a}) + \frac{a^2}{\pi^2 l^2} \left(\frac{1}{2} + \log \frac{2\pi l}{a}\right) + \right. \\ &\quad \left. + O\left(\frac{a^3}{l^3} \log \frac{1}{a}\right) \right]. \end{aligned}$$

Opmerking. Daar de fout in ψ_0 exponentieel klein wordt voor $a/l \rightarrow 0$ zijn al deze termen (en eventuele volgende) in asymptotische zin correct en is de ontwikkeling dezelfde als die welke uit een exacte oplossing met elliptische functies zou volgen.

3. Stroming om een cilindrisch profiel

3.1. Potentiaalstroming in de hydrodynamica

De stroming van niet-visceuze (= ideale) vloeistof wordt beschreven door de bewegingsvergelijkingen van Euler

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{K} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (1)$$

en de continuïteitsvergelijking

$$\text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

(\vec{v} = snelheid, p = druk, ρ = dichtheid, \vec{K} = kracht per eenheid van massa).

De vergelijkingen (1) en (2) zijn 4 vergelijkingen voor 5 onbekende functies. Hierbij komt nog een verband tussen ρ en p : de toestand-vergelijking, $\rho = \rho(p)$.

Zij $P(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)}$. Dan is $\text{grad } P = \frac{1}{\rho} \text{grad } p$.

Veronderstel dat \vec{K} afleidbaar is van een potentiaal $\vec{K} = - \text{grad } W$ (b.v., als \vec{K} de zwaartekracht is, $W = gz$).

Daar $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \text{grad} (\frac{1}{2} v^2) - \vec{v} \wedge \text{rot } \vec{v}$, kan men voor (1) dan schrijven..

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \wedge \text{rot } \vec{v} = - \text{grad} (P + \frac{1}{2} v^2 + W). \quad (3)$$

Nu kan uit (2) en (3) afgeleid worden dat

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \text{rot } \vec{v} \right) = \frac{1}{\rho} (\text{rot } \vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}.$$

Hieruit volgt dat, indien de beweging op enig moment rotatievrij is, hij dit ook blijft. Het is daarom zinvol om rotatie-vrije bewegingen te beschouwen. Er bestaat dan een snelheidspotentiaal $\phi(x, y, z, t)$ zodanig dat $\vec{v} = - \text{grad } \phi$. (4)

Uit (3) volgt dan

$$P + \frac{1}{2} v^2 + W = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{const} \quad (5)$$

(de integratie-constante kan eventueel in $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ worden opgenomen)
en uit (2) volgt

$$\Delta \phi + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (6)$$

(5) is de algemene vorm van de wet van Bernouilli. Daar (met (4))

P en dan p en ρ bekend zijn als ϕ bekend is, is (6) een vergelijking voor ϕ .

Wij beschouwen nu enige speciale gevallen.

- A. Zij de vloeistof incompressibel, dus $\rho = \text{const}$ (in ruimte en tijd).
Dan luidt (6)

$$\Delta\phi = 0,$$

zodat wij een zuivere potentiaal-stroming hebben. Daar nu $P = \frac{p}{\rho}$ luidt (5)

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho W = \rho \frac{\partial\phi}{\partial t} + \text{const} \quad (7)$$

(voor $W = gz$ en tijd onafhankelijkheid geldt $\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = \text{const}$, hetgeen een meer bekende vorm van de wet van Bernoulli is).

Wordt de vloeistof geheel door vaste wanden begrensd, dan kan ϕ geheel onafhankelijk van (7) bepaald worden - de druk p volgt dan achteraf uit (7) en (4). Treden vrije vloeistofoppervlakken op, dan moet daar (7) (met $p = \text{const}$) als randvoorwaarde gebruikt worden.

- B. Beschouw permanente stromingen van een compressibele ideale vloeistof zonder uitwendig krachtveld. Uit (5) volgt dan

$$P = \text{const} - \frac{1}{2}v^2 = \text{const} - \frac{1}{2}(\text{grad } \phi)^2. \quad (7)$$

Hiermee kan men (6) herleiden tot

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \sum_{i,j=1}^3 v_i v_j \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad (8)$$

waarin $\frac{1}{c^2} = \frac{d\rho}{dp}$ een functie van p en dus via (7) van ϕ is.

(Men kan bewijzen dat de grootte c , die de dimensie van een snelheid heeft, de snelheid is, waarmee kleine storingen zich voortplanten, c heet daarom de geluidssnelheid van het medium).

Uit (8) blijkt: indien bij een rotatievrije permanente stroming van een compressibele vloeistof de snelheden ver beneden de geluidssnelheid blijven (en dus het zg. getal van Mach $M = \frac{|v|}{c} \ll 1$ is) dan is de stroming in goede benadering een potentiaalstroming.

- C. Beschouw de rotatievrije permanente stroming van een incompressibel medium zonder uitwendig krachtveld die bestaat uit een uniform snelheidsveld $v_1' = V_\infty$, $v_2' = v_3' = 0$ met daarop gesuperponeerd een storing v_1'' , v_2'' , v_3'' zodanig dat $|\vec{v}''| \ll V_\infty$ en $\vec{v}'' \rightarrow 0$ in het oneindige. Men kan dan schrijven

$$\vec{v} = -\text{grad} (V_\infty x + \phi),$$

waarbij $|\text{grad } \phi| \ll V_\infty$. Door linearisatie volgt dan uit (8) dat ϕ moet voldoen aan

$$(1-M^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

en uit (7) volgt na linearisatie

$$p - p_{\infty} = \rho_{\infty} V_{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

met $M = \frac{V_{\infty}}{c_{\infty}}, \quad \frac{1}{c_{\infty}^2} = \left(\frac{d\rho}{dp}\right)_p = \rho_{\infty}$

Men heeft hier dan niet een zuivere potentiaalstroming, doch door affiene transformatie $x = \sqrt{1-M^2}x', y=y', z=z'$ kan men het probleem herleiden tot een potentiaalprobleem (althans als $M \neq 1$, het is echter niet nodig dat $M \neq 1$ is)

In het volgende zal steeds over permanente stroming van incompressibele media gesproken worden. Uit het bovenstaande blijkt echter dat ook een aantal andere stromingsgevallen hiertoe te herleiden zijn.

3.2. Potentiaalstroming om een cilindrisch profiel

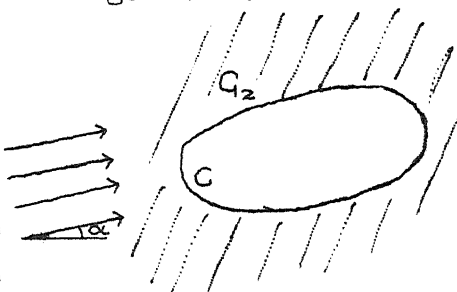
Zij C een begrensde enkelvoudige contour in het z -vlak en zij G_z het buitengebied hiervan.

Gevraagd wordt een functie

$\Omega(z)$ die analytisch is in G_z en zodanig dat

1e $\text{Im } \Omega = \text{constant op } C \quad (1)$

2e $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{d\Omega}{dz} = -V_0 e^{-i\alpha} \quad (2)$

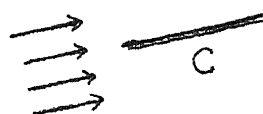


d.w.z. de complexe potentiaal van een twee-dimensionale stroming om het profiel die zich in het oneindige gedraagt als een zuivere parallelstroming met snelheidscomponenten $V_0 \cos \alpha, V_0 \sin \alpha$.

Indien C een rechte lijnige coupure is in de richting van de stroom (zie fig.) dan is de gevraagde potentiaal klaarblijkelijk

$$\Omega = -V_0 e^{-i\alpha} z,$$

daar de (ideale) vloeistof de aanwezigheid van het profiel niet "voelt".



Wij trachten nu andere gevallen door middel van conforme afbeelding hiertoe te herleiden.

a. cirkel

Door $w = z + \frac{R^2}{z} e^{2i\alpha}$ wordt het uitwendige van de cirkel om de oorsprong met straal R afgebeeld op het uitwendige van een coupure van $w = -2Re^{i\alpha}$ tot $w = 2Re^{i\alpha}$. Daar de omgeving van $z = \infty$ zonder draaiing of vermenigvuldiging op die van $w = \infty$ wordt afgebeeld

($\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{dw}{dz} = 1$) volgt hieruit direct dat

$$\Omega(z) = V_0 \left(z e^{-i\alpha} + \frac{R^2}{z} e^{i\alpha} \right) \quad (3)$$

de gezochte potentiaal is.

b. algemene geval

Zij $t = f(z)$ een functie die het gebied G_z afbeeldt op het uitwendige van een cirkel met straal R om de oorsprong van het t -vlak, zodanig dat $z = \infty$ correspondeert met $w = \infty$ en dat $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{dt}{dz} = 1$. Deze transformatie en de straal R van de cirkel, waardoor G_t begrensd wordt, zijn hierdoor eenduidig bepaald (beeld eerst G_z af op het uitwendige van de eenheidscirkel, zorg daarna door een gebroken lineaire transformatie dat $f(\infty) = \infty$ en zorg tenslotte door een draaiing en een vermenigvuldiging dat $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{dt}{dz} = 1$).

De functie

$$w = f(z) + \frac{R^2}{f(z)} e^{2i\alpha}$$

beeldt dan G_z af op het uitwendige van een coupure van $w = -2Re^{i\alpha}$ tot $w = 2Re^{i\alpha}$ en de gezochte complexe potentiaal is

$$\Omega(z) = -V_0 \left\{ f(z) e^{-i\alpha} + \frac{R^2}{f(z)} e^{i\alpha} \right\}. \quad (4)$$

c. coupure langs x-as

Zij C de coupure $-a < x < a$. Dan wordt door $t = (z + \sqrt{z^2 - a^2})$ ($\sqrt{z^2 - a^2} = z + O(z^{-1})$ voor $z \rightarrow \infty$) afgebeeld op het uitwendige van de cirkel $|t| = a$ (de inverse van (5) is nl. $z = \frac{1}{2}(t + \frac{a^2}{t})$).

Daar $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{dt}{dz} = 2$, is dit nog niet de goede functie $f(z)$, wij moeten nemen

$$f(z) = \frac{1}{2}(z + \sqrt{z^2 - a^2})$$

en de straal R van met C corresponderende cirkel wordt dan $R = \frac{1}{2}a$ (voor $z = a \cos q$ is $f(z) = \frac{1}{2}ae^{iq}$).

Volgens (4) is nu de gezochte potentiaal

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= -\frac{1}{2}V_0 \left\{ (z + \sqrt{z^2 - a^2}) e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z + \sqrt{z^2 - a^2}} e^{i\alpha} \right\} = \\ &= -V_0 \left\{ z \cos \alpha - i \sqrt{z^2 - a^2} \sin \alpha \right\}. \end{aligned}$$

Klaarblijkelijk geldt langs de contour $\psi = 0$. Om de gehele stuw-puntsstromingen $\psi = 0$ te vinden substitueren wij $z = a \cosh(p+iq)$ ($p \geq 0$, $0 \leq q < 2\pi$). Dan wordt $\Omega = -V_0 a \cosh(p + iq - i\alpha)$, en dus

$$\psi = V_0 a \sinh p \sin(q - \alpha).$$

ψ is dus nul indien δf $p = 0$ (dus $z = a \cos q$ dus op C), δf $q = \alpha$ of $\alpha + \pi$. Dit laatste geeft $x = \pm a \cosh p \cos \alpha$, $y = \pm a \sinh p \sin \alpha$, dus

$$\frac{x^2}{a^2 \cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{a^2 \sin^2 \alpha} = 1$$

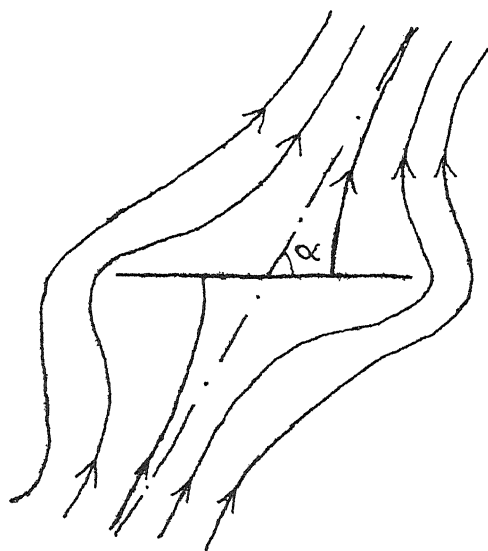
De stuwpointsstroomlijn bestaat dus uit twee halve takken van een hyperbool die de uiteinden van C als brandpunten en de aanstroomrichting als een der asymptotische richtingen heeft. De stuwpunten liggen bij $x = a \cos \alpha$, $y = +0$ en $x = -a \cos \alpha$, $y = -0$ (zie fig.). Deze kunnen natuurlijk ook gevonden worden als wortels van $\frac{d\Omega}{dz} = 0$.

d. Ellips

Voor een ellips met halve assen a en b ($a > b$) en brandpuntsafstand $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ vindt men met $t = \frac{1}{2}(z + \sqrt{z^2 - c^2})$ en $R = \frac{1}{2}(a+b)$

$$\Omega(z) = -\frac{1}{2}V_0 \left[(z + \sqrt{z^2 - c^2})e^{-i\alpha} + \frac{a+b}{a-b}(z - \sqrt{z^2 - c^2})e^{i\alpha} \right].$$

Ook hier bestaat de stuwpointsstroomlijn uit twee takken van de hyperbool die confocaal is met de ellips en de aanstroomrichting als een der asymptotenrichtingen heeft.



e. Stroming met circulatie

De potentiaal (3) geeft niet de meest algemene stroming om een cirkelvormig-profiel die aan de voorwaarden 1^o en 2^o voldoet. Algemener is

$$\Omega(z) = -V_0 \left(z e^{-i\alpha} + \frac{R^2}{z} e^{i\alpha} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \log \frac{z}{R}, \quad \Gamma \text{ reëel},$$

en dit is, afgezien van een irrelevante additieve constante, ook de meest algemene oplossing.

De extra-term is de potentiaal van een wervel. De stroomlijnen zijn cirkels om de oorsprong en de absolute waarde van de snelheid is

$$|v_x - i v_y| = |q| = \left| -\frac{d}{dz} \left(-\frac{\Gamma}{2\pi i} \log \frac{z}{R} \right) \right| = \frac{|\Gamma|}{2\pi |z|}.$$

De circulatie $\oint \vec{v} \cdot d\vec{s}$ is Γ voor iedere kromme die de oorsprong in de linksom-zin eenmaal omsluit:

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint (v_x dx + v_y dy) = \operatorname{Re} \oint (v_x - i v_y) dz = \operatorname{Re} \frac{\Gamma}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z} = \Gamma.$$

De stroming is wel rotatie-vrij, immers een potentiaal-stroming - het singuliere punt $z=0$ ligt buiten het gebied waar de stroming wordt beschouwd.

Op dezelfde manier kan men in het algemene geval aan (4) een term $+\frac{\Gamma}{2\pi i} \log \frac{f(z)}{R}$ toevoegen.

Voor het geval dat C de coupure $-a < x < a$ is, vindt men aldus

$$\Omega(z) = -V_0 (z \cos \alpha - i \sqrt{z^2 - a^2} \sin \alpha) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \log \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a}.$$

Voor de complexe snelheid volgt hieruit

$$q = -\frac{d\Omega}{dz} = V_0 \left(\cos \alpha - i \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \sin \alpha \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}}. \quad (5)$$

In het algemeen is de snelheid oneindig groot in de uiteinden $z = \pm a$.

Door geschikte keuze van Γ kunnen we echter zorgen dat in één van deze punten de singulariteit verdwijnt. Kiezen we

$$\Gamma = -2\pi V_0 a \sin \alpha \quad (6)$$

dan verdwijnt de singulariteit bij $z=a$ en we houden over

$$q = V_0 \left(\cos \alpha - i \sqrt{\frac{z-a}{z+a}} \sin \alpha \right). \quad (7)$$

Experimenteel vindt men dat bij een scherpe achterkant van een profiel inderdaad geen singulariteit optreedt. De formules (6) en (7) zijn dus "goed" voor het geval dat $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Bij draagvlakprofielen heeft men in het algemeen een ronde voorkant en een scherpe achterkant. De circulatie is dan zodanig, dat aan de achterzijde geen singulariteit optreedt (Kutta-voorwaarde).

3.3. Berekening van kracht en moment

Voor de kracht (dK_x, dK_y) op een stukje dz van de omtrek van een profiel C heeft men $d(K_x + iK_y) = i p dz$. Derhalve $K_x + iK_y = i \oint_C p dz$.

Analoog vindt men voor het moment t.o.v. de oorsprong

$$M = \oint_C (x dK_y - y dK_x) = \operatorname{Re} \oint_C z d(K_y + i K_x) = \operatorname{Re} \oint_C z p \overline{dz}$$

De druk p kan men berekenen met de wet van Bernoulli:

$$p = p_\infty - \frac{1}{2} \rho v^2 = p_\infty - \frac{1}{2} \rho |q|^2, \text{ met } q = - \frac{d\Omega}{dz}.$$

Derhalve (een constante druk geeft geen bijdrage)

$$K_y + i K_x = \oint_C p \overline{dz} = -\frac{1}{2} \rho \oint_C q \overline{q} \overline{dz} = -\frac{1}{2} \rho \oint_C q^2 dz, \quad (1)$$

daar $\overline{q} \overline{dz} = -d\overline{\Omega} = -d\Omega = q dz$, omdat $\operatorname{Im} \Omega$ constant is op C .

$$\text{Analoog } M = -\frac{1}{2} \rho \operatorname{Re} \oint_C z q \overline{q} \overline{dz} = -\frac{1}{2} \rho \operatorname{Re} \oint_C z q^2 dz. \quad (2)$$

Dus formules van Blasius zijn zeer prettig daar men complexe integralen heeft en men met de stelling van Cauchy de integratieweg kan vervormen tot een cirkel om $z = \infty$.

Voor de vlakke plaat volgt uit (5) (§3.2)

$$q = V_0 e^{-i\alpha} + \frac{\Gamma}{2\pi iz} - \frac{ia^2 V_0 \sin \alpha}{2z^2} + O(z^{-3})$$

$$q^2 = V_0^2 e^{-2i\alpha} + \frac{\Gamma V_0 e^{-i\alpha}}{\pi iz} - \frac{ia^2 V_0^2 \sin \alpha e^{-i\alpha}}{z^2} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 z^2} + O(z^{-3})$$

en dus:

$$\begin{aligned} K_y + i K_x &= - \int \Gamma V_0 e^{-i\alpha} \\ M &= -\frac{1}{2} \pi \rho a^2 V_0^2 \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (3)$$

Hieruit volgt:

1°. indien er geen circulatie is, dan ondervindt de plaat geen kracht (paradox van d'Alembert).

2°. het moment is zodanig dat een vrij om het middelpunt draaibare plaat loodrecht op de stroomrichting gaat staan.

3°. indien de circulatie zodanig is dat aan de Kutta-voorwaarde is voldaan, dan is er een kracht (lift) loodrecht op de aanstroomrichting (en naar links gedraaid) ter grootte $2\pi \rho a V_0^2 \sin \alpha$.

(immers $K_x + i K_y = i(K_y + i K_x) = -i \int \Gamma V_0 e^{i\alpha} = i e^{i\alpha} \cdot 2\pi \rho a V_0^2 \sin \alpha$).

Opmerking. Het blijkt dat (3) ook geldt voor een willekeurig-profiel met aanstroomsnelheid $q_\infty = V_0 e^{-i\alpha}$ en circulatie Γ . De lift staat dus altijd loodrecht op de aanstroomrichting.

4. Het probleem van Dirichlet. Functies van Green.

4.1. Inleiding. Eenduidigheid.

Zij G een gebied in het x, y -vlak, waarvan de rand C bestaat uit de vereniging van eindig veel continu differentieerbare wegen. Zij $f(s)$ een op C gegeven continue reële functie. Gevraagd wordt een functie $\phi(x, y)$ die harmonisch is in G en continu in $G+C$, zodanig dat op C $\phi=f$ (probleem van Dirichlet of eerste randwaarde-probleem der potenti-aal-theorie).

We bewijzen eerst, dat dit probleem hoogstens één oplossing heeft. Zij $\phi(x, y)$ harmonisch in een gebied G . Dan is $\phi(x, y)$ het reële deel van een analytische functie $\Omega(z)$. Zij $z_0 = x_0 + iy_0$ een punt van G . Dan geldt volgens Cauchy

$$\Omega(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_W \frac{\Omega(z)}{z-z_0} dz, \quad (1)$$

voor iedere enkelvoudige gesloten weg W die z_0 omvat en geheel binnen G_z ligt. Neem voor W een cirkel om z_0 met straal r . Dan volgt uit (1), met $z-z_0 = re^{i\theta}$:

$$\Omega(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Omega(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Neem hiervan het reële deel:

$$\phi(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) d\theta, \quad (2)$$

in woorden: een in een gebied G harmonische functie is in ieder punt van G gelijk aan het gemiddelde van de functiewaarden op een willekeurige binnen G verlopende cirkel om dit punt.

Hieruit volgt direct: een in G harmonische functie $\phi(x, y)$ heeft maxima, noch minima in inwendige punten van G . Weten we bovendien dat $\phi(x, y)$ continu is in $G+C$, dan kunnen we ook zeggen: alle maxima en minima van $\phi(x, y)$ liggen op C . Hieruit volgt weer: als $\phi(x, y)=0$ op C (en harmonisch in G , continu in $G+C$) dan is $\phi(x, y)=0$ in G . Hieruit volgt de eenduidigheid van de oplossing van het probleem van Dirichlet: het verschil van twee eventuele oplossingen moet nul zijn op C en dus ook in G .

4.2. De formule van Poisson.

Zij het gebied G de eenheidscirkel en zij $f(\theta)$ gegeven voor $0 \leq \theta \leq 2\pi$. We kunnen trachten de oplossing van het probleem van Dirichlet (met $f(\theta)$ als randfunctie) te vinden in de vorm van een Fourierreeks. Daar $r^n \cos n\theta$ en $r^n \sin n\theta$ (r en θ poolcoördinaten) harmonische functies zijn (deze functies ontstaan b.v. door separatie van variabelen in de vergelijking van Laplace in poolcoördinaten: $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \phi}{\partial r}) +$

$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0$), kunnen we stellen

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) r^n \quad (1)$$

Voor $r=1$ volgt hieruit

$$f(\theta) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \quad (2)$$

en dus moet volgens de theorie der Fourier-reeksen

$$\begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix} d\varphi \quad (3)$$

Deze redenering is heuristisch. We weten niet of de reeks (1) (met coëfficiënten volgens (3)) convergeert voor $r=1$ en, indien dat al zo is, of hij tot som $f(\theta)$ heeft.

Substitutie van (3) in (1) levert:

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n(\theta - \varphi) d\varphi. \quad (4)$$

Stelling. Als $\int_0^{2\pi} |f(\varphi)| d\varphi$ bestaat, dan is het rechterlid van (4) harmonisch voor $r < 1$ en voor ieder θ_0 , waar $f(\theta)$ continu is, geldt

$$\lim_{\substack{r \uparrow 1 \\ \theta \rightarrow \theta_0}} \Phi(r, \theta) = f(\theta_0) \quad (5)$$

Verder geldt voor $r < 1$

$$\Phi(r, \theta) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} f(\varphi) d\varphi \right] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos(\theta - \varphi)} f(\varphi) d\varphi$$

(formule van Poisson). (6)

Opmerkingen. 1. We eisen niet, dat $f(\theta)$ continu is op de hele cirkel. Is dit echter het geval, dan volgt uit de stelling dat $\Phi(r, \theta)$ continu is voor $r \leq 1$ en dat $\Phi(1, \theta) = f(\theta)$. De stelling is a.h.w. een generalisatie van onze oorspronkelijke formulering van het probleem van Dirichlet.

2. Uit de stelling volgt niet (ook niet als $f(\theta)$ continu is), dat de Fourier-reeks (2) convergeert en tot som $f(\theta)$ heeft. Hiervoor zou een iets scherpere eis voor $f(\theta)$ nodig zijn. Voor het probleem van Dirichlet is het echter niet belangrijk of (2) convergeert.

Bewijs. We bewijzen eerst, dat $\Phi(r, \theta)$ harmonisch is voor $r < 1$ en dat (4) equivalent is met (6).

Uit (4) volgt

$$\Phi(r, \theta) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{2\pi} f(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi \right]. \quad (7)$$

Daar

$$\left| \int_0^{2\pi} f(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(\varphi)| d\varphi,$$

convergeert de machtreeks in (7) zeker voor $|z| < 1$ en dus is Φ het reële deel van een voor $|z| < 1$ analytische functie.

Daar voor vaste z ($|z| < 1$) en $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ de reeks

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n e^{-in\varphi}$$

uniform convergeert met als som

$$1 + \frac{2ze^{-i\varphi}}{1 - ze^{-i\varphi}} = \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z},$$

mogen we in (7) sommatie en integratie verwisselen en we vinden

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta) &= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} f(\varphi) d\varphi \right] = \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(e^{i\varphi} + re^{i\theta})(e^{-i\varphi} - re^{-i\theta})}{(e^{i\varphi} - re^{i\theta})(e^{-i\varphi} - re^{-i\theta})} f(\varphi) d\varphi \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\varphi - \theta)} d\varphi, \text{ d.i. formule (6).} \end{aligned}$$

Voor $f(\varphi) = 1$ volgt uit (4) en (6)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \varphi)} d\varphi = 1 \quad (0 \leq r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

Zij nu $f(\varphi)$ continu voor $\varphi = \varphi_0$. (Veronderstel voor het gemak dat $\varphi_0 \neq 0$ en $\varphi_0 \neq 2\pi$ - is dit niet het geval, dan wordt de redenering iets anders). Dan is

$$\Phi(r, \theta) - f(\varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \varphi)} \{ f(\varphi) - f(\varphi_0) \} d\varphi.$$

Bepaal bij gegeven $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ zo dat

$$|f(\varphi) - f(\varphi_0)| < \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{voor } |\varphi - \varphi_0| < 2\delta.$$

Kies δ bovendien zo klein, dat $2\delta < \theta_0 < 2\pi - 2\delta$.

Zij nu θ zo dat $|\theta - \varphi_0| < \delta$ (er geldt dan zeker dat $\delta < \theta < 2\pi - \delta$).

Splitst de integraal in drie delen:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\theta - \delta}, \quad I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta - \delta}^{\theta + \delta}, \quad I_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta + \delta}^{2\pi}.$$

Voor I_2 geldt $|\varphi - \varphi_0| \leq |\varphi - \theta| + |\theta - \varphi_0| < 2\delta$ en dus

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos(\theta-\varphi)} d\varphi < \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_0^{2\pi} = \frac{\varepsilon}{2}$$

(de breuk is steeds positief (als $r < 1$), we mogen de absoluutstrepen dus weglaten).

Voor I_1 geldt $\delta \leq \theta - \varphi \leq \theta < 2\pi - \delta$ en voor I_3 geldt $\delta \leq \varphi - \theta \leq 2\pi - \theta < 2\pi - \delta$. Voor beide geldt dus $\cos(\theta - \varphi) < \cos \delta$ en dus

$$1+r^2-2r \cos(\theta-\varphi) > 1+r^2-2r \cos \delta = (r-\cos \delta)^2 + \sin^2 \delta \geq \sin^2 \delta.$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} |I_1| + |I_3| &\leq \frac{1-r^2}{2\pi \sin^2 \delta} \left\{ \int_0^{\theta-\delta} + \int_{\theta+\delta}^{2\pi} \right\} |f(\varphi) - f(\theta_0)| d\varphi \leq \\ &\leq \frac{2(1-r)}{\sin^2 \delta} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varphi)| d\varphi + |f(\theta_0)| \right\} < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Voor r voldoende dicht bij 1.

We hebben dus bewezen: bij gegeven ε is er een δ , en een δ_1 , zodanig dat $|\Phi(r, \theta) - f(\theta_0)| < \varepsilon$ voor alle (r, θ) met $|\theta - \theta_0| < \delta$ en $1 - \delta_1 < r < 1$. Het doet er dus niet toe, hoe het punt (r, θ) tot $(1, \theta_0)$ nadert (mits van binnen de cirkel). Hiermee is de stelling geheel bewezen.

4.3. Willekeurig gebied.

Met de formule van Poisson is het probleem van Dirichlet voor de eenheidscirkel opgelost. We merken op dat het resultaat ook in de volgende vorm geschreven kan worden (substitutie $e^{i\varphi} = \xi$, $d\varphi = \frac{d\xi}{i\xi}$)

$$\Phi(x, y) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=1} \frac{\xi+z}{\xi-z} f(\xi) \frac{d\xi}{\xi} \right] \quad (1)$$

Hierbij is $f(\xi)$ de (reële) randfunctie, die slechts langs de rand ($|\xi|=1$) gegeven is.

Zij nu G_z een enkelvoudig samenhangend gebied met op stukken continue differentieerbare rand C_z . Volgens de stelling van Riemann bestaat er dus een in G_z analytische functie $t=t(z)$ die G_z conform afbeeldt op het inwendige van de cirkel $|t|=1$ en die, volgens een volgende stelling, ook $G_z + C_z$ continu en eeneenduidig afbeeldt op de afgesloten cirkel $|t| \leq 1$. Zij $f(z)$ een op G_z gegeven continue randfunctie. Dan is $f(z(t))$, waarin $z(t)$ de inverse is van $t(z)$, continu op $|t|=1$. Volgens Poisson is dan de functie

$$\Omega(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\tau|=1} \frac{\tau+t}{\tau-t} f(z(\tau)) \frac{d\tau}{\tau}$$

analytisch voor $|t| < 1$, terwijl het reële deel van $\Omega(t)$ continu is voor $|t| \leq 1$ en voor $|t|=1$ geldt $\operatorname{Re} \Omega(t) = f(z(\tau))$.

Daar een analytische functie van een analytische functie analytisch is, volgt hieruit dat de oplossing van het probleem van Dirichlet voor

het gebied G_z gegeven wordt door

$$\Phi(x, y) = \operatorname{Re} \Omega(t(z)) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=1} \frac{\tau+t(z)}{\tau-t(z)} f(z(\tau)) \frac{d\tau}{\tau} \right].$$

Substitueren we in de integraal nog $\tau=t(\xi)$ (ξ op C_z) dan luidt de formule

$$\Phi(x, y) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{t(\xi)+t(z)}{t(\xi)-t(z)} f(\xi) \frac{t'(\xi)d\xi}{t(\xi)} \right] \quad (2)$$

(dit mag alleen als $t(z)$ ook op C_z nog differentieerbaar is).

Voorbeeld. Zij G_z het halve vlak $\operatorname{Im} z > 0$. Voor de afbeelding $t(z)$ kunnen we kiezen

$$t(z) = i \frac{z-1}{z+1}$$

Hieruit vinden we (met $\xi = \zeta = \text{reel}$)

$$\frac{t'(\xi)}{t(\xi)} = \frac{1}{\xi-1} - \frac{1}{\xi+1} = \frac{2i}{\xi^2+1},$$

$$\frac{t(\xi)+t(z)}{t(\xi)-t(z)} = \frac{\xi z+1}{1(\xi-z)}$$

en dus:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi z+1}{(\xi-z)(\xi^2+1)} f(\xi) d\xi \right] = \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\xi-z} - \frac{\xi}{\xi^2+1} \right\} f(\xi) d\xi \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(\xi-x)^2+y^2} f(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (3)$$

(formule van Poisson voor een halfvlak).

We passen (3) toe op de volgende functie

$$f(x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{voor } x > 0 \\ -\pi/2 & \text{voor } x < 0 \end{cases}$$

($f(x)$ is niet continu, dit voorbeeld zal ons dus leren wat er bij een discontinuïteitpunt gebeurt). We vinden

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{y}{(\xi-x)^2+y^2} d\xi - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \frac{y}{(\xi-x)^2+y^2} d\xi = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{x}{y}}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} - \frac{1}{2} \int_{\frac{x}{y}}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \int_{-x/y}^{\frac{x}{y}} \frac{dt}{1+t^2} = \arctan \frac{x}{y}, \end{aligned}$$

waarbij de hoofdwaarde (tussen $-\pi/2$ en $+\pi/2$) genomen moet worden (y is >0 !). Voor $y \rightarrow 0$ vinden we natuurlijk $\Phi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ voor $x > 0$ en $\rightarrow -\frac{\pi}{2}$ voor $x < 0$, doch voor $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$ is er geen limiet. Langs de lijn $x=t \sin \alpha$, $y=t \cos \alpha$ ($-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$) geldt $\Phi(x, y) = \alpha$ en de limiet van

$\phi(x,y)$ voor $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$ hangt geheel af van de richting van waaruit we dit punt naderen en varieert tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $+\frac{\pi}{2}$, d.i. tussen de linker- en rechterlimiet van $f(x)$ voor $x=0$.

Deze beschouwingen gelden ook voor meer algemene situaties, waar $f(x)$ een eindige sprong heeft.

4.4. De functie van Green.

In veel problemen over harmonische functies speelt de z.g. functie van Green een belangrijke rol. Zij G een gebied met rand C en (x_0, y_0) een inwendig punt van G . Dan wordt de functie van Green $g(x,y; x_0, y_0)$ gedefinieerd door:

- 1°. $g(x,y; x_0, y_0) + \frac{1}{2\pi} \log \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ is als functie van x en y harmonisch in G en continu in $G+C$;
- 2°. $g(x,y; x_0, y_0) = 0$ voor (x,y) op C .

Het is duidelijk dat g zelf harmonisch is in G , behalve in het punt (x_0, y_0) .

De bepaling van g komt neer op de oplossing van een probleem van Dirichlet: $g + \frac{1}{2\pi} \log \sqrt{}$ is harmonisch in G en heeft als randwaarden $\frac{1}{2\pi} \log \sqrt{}$.

We bewijzen nu:

Als $s=s(z)$ het gebied $G+C$ conform en continu afbeeldt op het boven-halfvlak $\text{Im } s \geq 0$, dan is

$$g(x,y; x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{s(z) - \overline{s(z_0)}}{s(z) - s(z_0)} \right|$$

Bewijs. Daar $s(z)$ G conform afbeeldt op $\text{Im } s > 0$, is $f(z) = \frac{s(z) - \overline{s(z_0)}}{s(z) - s(z_0)}$ analytisch in G , behoudens een pool in $z=z_0$, en bovendien $s(z) - s(z_0) \neq 0$, daar $\text{Im } s(z) > 0$, $\text{Im } \overline{s(z_0)} < 0$. Verder is $f(z)$ continu in $G+C$ en $|f(z)|=1$ op C . $\log |f(z)| = \text{Re } \log f(z)$ is dus harmonisch in G , behalve in (x_0, y_0) , continu in $G+C$ en nul op C . Daar $s'(z_0) \neq 0$, geldt bij $z=z_0$ $f(z) = \frac{1}{z-z_0} \{a_0 + a_1(z-z_0) + \dots\}$, en dus $\log f(z) = -\log(z-z_0) + b_0 + b_1(z-z_0) + \dots$, dus $g = -\frac{1}{2\pi} \log |z-z_0| + \text{harmonisch}$, q.e.d.

Voorbeeld.

Zij G de strook $0 < x < b$, $-\infty < y < \infty$. Door $s = i \tan \frac{\pi z}{2b}$ wordt deze afgebeeld op $\text{Im } s > 0$. Derhalve geldt

$$\begin{aligned} g(x,y; x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{\tan \frac{\pi z}{2b} + \tan \frac{\pi z_0}{2b}}{\tan \frac{\pi z}{2b} - \tan \frac{\pi z_0}{2b}} \right| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{\sin \frac{\pi}{2b} (z+z_0)}{\sin \frac{\pi}{2b} (z-z_0)} \right| = \frac{1}{4\pi} \log \frac{\cosh \frac{\pi(y+y_0)}{b} - \cos \frac{\pi(x+x_0)}{b}}{\cosh \frac{\pi(y-y_0)}{b} - \cos \frac{\pi(x-x_0)}{b}}. \end{aligned}$$

Opmerking.

Vat men $g(x,y;x_0,y_0)$ op als potentiaal van een stromingsveld, dan is dit de potentiaal van een puntbron in (x_0,y_0) die per tijdseenheid een volume-eenheid injecteert in een gebied dat begrensd wordt door wanden, waarlangs de potentiaal nul is. Immers, in de omgeving van (x_0,y_0) geldt (in poolcoördinaten t.o.v. x_0,y_0)

$$g = - \frac{1}{2\pi} \log r + \dots \text{ en dus}$$

$$v_r = - \frac{\partial g}{\partial r} = \frac{1}{2\pi r} + \dots,$$

dus $\int_0^{2\pi} v_r(r,\theta) r d\theta \rightarrow 1$ voor $r \rightarrow 0$. Daar $\text{div } \vec{v} = 0$, behalve in (x_0,y_0) , geldt $\oint v_n ds = 1$ voor iedere kromme die de bron eenmaal omsluit.

5. Stroming met vrije oppervlakken

5.1. Hydrodynamica

Langs een stationair vrij oppervlak van een ideale incompressibele vloeistof gelden de volgende randvoorwaarden

- de snelheid loodrecht op het oppervlak is nul (2-dimensionaal: de rand is een stroomlijn)
- de druk is gelijk aan die van het aangrenzende medium, hetwelk in het algemeen constant verondersteld wordt. Uit de wet van Bernoulli volgt dan (in afwezigheid van uitwendige krachten) dat v^2 constant is langs het grensvlak.

In het algemeen zijn dergelijke problemen zeer moeilijk daar de plaats van het vrije oppervlak a priori onbekend is. Bij tweedimensionale problemen kan men echter iets doen met behulp van conforme afbeelding. Uit de eerste randvoorwaarde volgt nl. dat het beeld van het vrije oppervlak in het Ω -vlak ligt op een rechte $\text{Im } \Omega = \text{const.}$, terwijl het beeld in het $q (= q_x - i q_y = -\frac{d\Omega}{dz})$ -vlak (hodograaf-vlak) een deel van een cirkel $|q| = \text{const.}$ is. Met behulp hiervan kan men vaak a priori de met de stroming corresponderende gebieden G_Ω en G_q aangeven. Daar Ω en q analytische functies van z en dus van elkaar zijn, vindt men door conforme afbeelding van G_q op G_Ω de functie $\Omega = \Omega(q)$. Daarna volgt $z(q)$ door integratie uit $\frac{dz}{dq} = \frac{dz}{d\Omega} \cdot \frac{d\Omega}{dq} = -\frac{1}{q} \frac{d\Omega}{dq}$.

De nog onbekende parameters worden als regel bepaald met behulp van de reeds bekende delen van de rand van G_z .

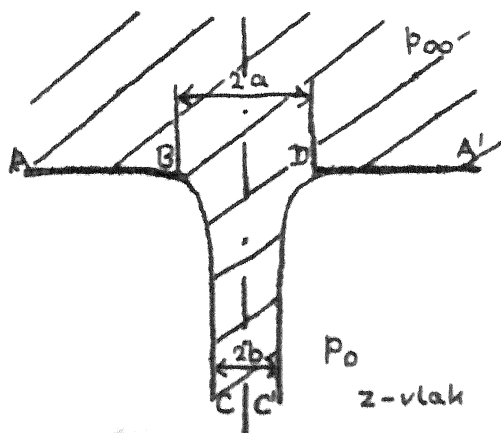
$\Omega = \Omega(q)$. Daarna volgt $z = z(q)$ uit

$$dz = -\frac{d\Omega}{q} = -\frac{1}{q} \frac{d\Omega}{dq} dq.$$

Door integratie vindt men met behulp van a priori bekende randdelen van G_Ω de nog onbekende parameters etc.

5.2. Het uitstromingsprobleem van Toricelli.

We passen de geschetste methode toe op het volgende probleem. Beschouw de uitstroming van een incompressibele ideale vloeistof door een (∞ lange) spleet in een vlakke wand. De druk in de vloeistof op grote afstand van de spleet,

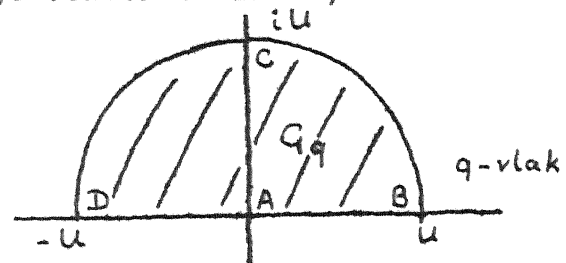
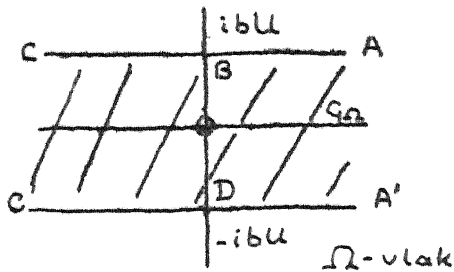


waar de snelheid vrijwel nul is, zij p_∞ , de druk in de vrije ruimte zij $p_0 < p_\infty$. Van de zwaartekracht zien we voorlopig af. Voor de snelheid U langs de rand van de vloeistof-straal geldt volgens Bernoulli

$$U = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_\infty - p_0)}. \quad (1)$$

Zij de breedte van de spleet $2a$ en de breedte van de straal op grote afstand van de spleet $2b$.

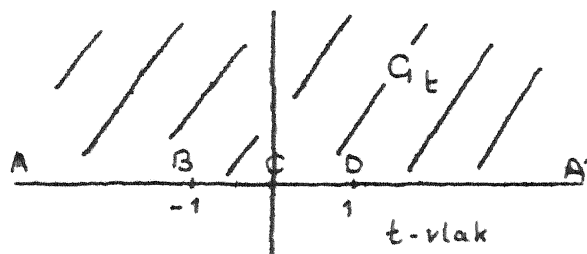
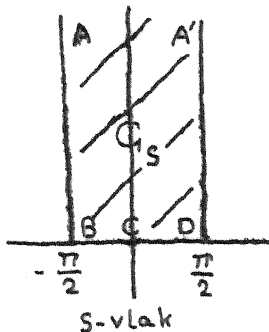
We kunnen nu de gebieden G_Ω en G_q tekenen (na geschikte keuze van de vrije constante in Ω)



Om de afbeelding van G_Ω op G_q te vinden beschouwen we als hulpvariabelen

$$s = -i \log\left(\frac{-iq}{U}\right) \quad (2)$$

$$t = i e^{\pi\Omega/2bU} \quad (3)$$



Door

$$t = \sin s \quad (4)$$

wordt G_s op G_t afgebeeld en met (2) en (3) geeft dit een eeneenduidig verband tussen Ω en q .

Derhalve hebben we

$$\begin{aligned} dz &= -\frac{d\Omega}{q} = -\frac{d\Omega}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \frac{ds}{q} = \\ &= -\frac{2bU}{\pi \sin s} \cdot \cos s \cdot \frac{ds}{iUe^{is}} = \frac{2ib}{\pi} \cdot \cot s \cdot e^{-is} ds. \end{aligned}$$

We integreren van B naar D , waarbij we echter niet door C mogen gaan, daar de integrand hier een pool heeft. Kiezen we de integratie-weg als getekend dan vinden we

$$2a = \frac{2ib}{\pi} \left[\left(\int_{-\pi/2}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi/2} \right) \left(\frac{\cos^2 s}{\sin s} - i \cos s \right) ds + \int_{-\delta}^{\delta} \cot s e^{-is} ds \right].$$

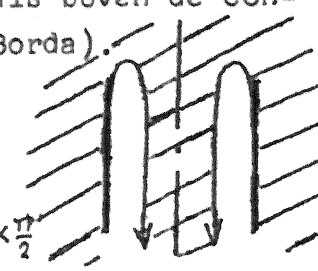
De eerste integraal levert voor $\delta \rightarrow 0$ $\frac{2ib}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos s ds = \frac{4b}{\pi}$,

terwijl de integraal langs de halve cirkel levert $\frac{2ib}{\pi} (-\pi i)$ residu

$=2b$, d.w.z. de breedte van de straal voor $y \rightarrow -\infty$.

Derhalve $\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b}{a} = \frac{1}{1 + \frac{2}{\pi}}$ (contractie coefficient).

Opmerking. Dat σ groter is dan $\frac{1}{2}$ is elementair in te zien door beschouwing van de impulsbalans. Veronderstelt men dat overal langs de bodem de druk p_∞ is, dan is de op de straal werkende verticale kracht $2a(p_\infty - p_0)$, terwijl de per tijdseenheid uitstromende impuls is $2b\rho U^2$, waaruit met (1) volgt $b = \frac{1}{2}a$. Daar in werkelijkheid de druk op de bodem tussen p_∞ en p_0 varieert, zal σ in het algemeen groter dan $\frac{1}{2}$ zijn. In het hieronder getekende geval is aan de veronderstelling wel voldaan. Berekent men analoog als boven de contractie coefficient, dan blijkt inderdaad $\sigma = \frac{1}{2}$ (Borda).
Verder volgt uit (5) direct de volgende parameter-voorstelling van de kromme C'D:

$$\left. \begin{aligned} x &= b\left(\frac{2}{\pi} \sin s + 1\right) \\ y &= -\frac{2b}{\pi} \left[\log \left(\cotn \frac{1}{2}s \right) - \cos s \right] \end{aligned} \right\} 0 < s < \frac{\pi}{2}$$


Voor kleine s (dicht bij C) volgt hieruit:

$$\begin{aligned} x - b &\sim \frac{2b}{\pi} s \\ y &\sim -\frac{2b}{\pi} \left(\log \frac{2}{s} - 1 \right) \\ &= -\frac{\pi |y|}{2b} \end{aligned}$$

en dus $x - b \sim \frac{4b}{\pi e} e^{-\frac{\pi |y|}{2b}}$.

Voor $|y| > 4b$ is dus vrijwel $x=b$. Het gebied, waarin de contractie van de straal plaats vindt is van de orde van enkele malen de breedte van de straal. Dit is van belang in verband met het feit dat de zwaartekracht verwaarloosd is. Houdt men wel rekening met de zwaartekracht, dan geldt langs de vrije randen $\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gy = \frac{1}{2}\rho U^2$, en dus

$$v^2 = U^2 - 2gy$$

waarin U de uitstroomsnelheid ($y=0$) is. Indien nu $\frac{ga}{U^2} \ll 1$ is, dan geldt voor het gebied, waar de contractie van de straal plaats vindt, in goede benadering $v=U$ en de bovenstaande beschouwingen blijven geldig. Natuurlijk neemt onder invloed van de zwaartekracht de breedte van de straal naar beneden af, in benadering is deze $\frac{2b}{\sqrt{1 - (2g y/U^2)}}$.

Opmerking. Stroomt de vloeistof onder invloed van de zwaartekracht uit een vat met waterhoogte h , dan volgt uit Bernoulli $\frac{1}{2}\rho U^2 = \rho gh$, dus

$$U = \sqrt{2gh} \quad (\text{Toricelli}).$$

5.3. Poreuze media.

Voor de stationaire stroming door een poreus medium geldt

$$\vec{q} = -k \operatorname{grad} \phi, \text{ met } \phi = \frac{p}{\rho g} + y \text{ (Darcy).}$$

Langs een z.g. phreatisch oppervlak $y = \eta(x)$, waar de vloeistof in vrij contact met de atmosfeerdruk ($p=0$) staat, geldt dus

$$\phi(x, \eta(x)) = \eta(x) \quad (1)$$

$$\text{en} \quad q_y = \frac{d\eta}{dx} q_x, \quad (2)$$

Differentiatie van (1) naar x levert

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{d\eta}{dx} = \frac{d\eta}{dx},$$

$$\text{of} \quad q_x + q_y \frac{d\eta}{dx} = -k \frac{d\eta}{dx}. \quad (3)$$

Eliminatie van $\frac{d\eta}{dx}$ tussen (2) en (3) geeft

$$q_x^2 + q_y^2 = -k q_y.$$

Of, met $q = q_x - iq_y$

$$\left| q - \frac{1}{2}ik \right|^2 = \frac{1}{4} k^2.$$

In het q -vlak ligt het beeld van een vrij oppervlak dus op een cirkel met middelpunt $\frac{1}{2}ik$ en straal $\frac{1}{2}k$. Dank zij dit feit kunnen de in 5.1 aangeduide methoden ook hier worden gebruikt.